

**ΑΕΝΜΑΚ ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ  
ΝΑΥΤΙΚΟΥ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ  
ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ**

**ΘΕΜΑ: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΜΕΘΟΔΟΣ  
ΖΥΓΟΣΤΑΘΜΙΣΗΣ ΜΗΧΑΝΩΝ  
ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ**

**ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ  
ΚΑΛΑΪΤΖΟΓΛΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ**

**ΑΕΜ: 4548**

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ:  
ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΥ ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ**

**ΘΕΣΣΑΛΟΝΙΚΗ 2015**

## ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

	Σελίδα
1. Εισαγωγή.....	3
2. Introduction.....	4
3. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 Ανάλυση ενός μέλους υπό την επίδραση δυνάμεων και ενός ζεύγους.....	5
4. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 Γραφική ανάλυση δυνάμεων ενός διωστήρα.....	7
5. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 Αναλυτική επίλυση μηχανισμού διωστήρα.....	9
6. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 Ζυγοστάθμιση των μηχανών.....	12
7. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 Ζυγοστάθμιση ρότορα.....	14
8. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6 Στατική ζυγοστάθμιση.....	18
9. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7 Δυναμική ζυγοστάθμιση.....	22
10. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8 Ζυγοστάθμιση παλινδρομικών μηχανών.....	28
11. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9 Μονοκύλινδρες μηχανές.....	31
12. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10 Πολυκύλινδρες μηχανές.....	34
13. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11 Μηχανές σε σειρά.....	40
14. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12 Μηχανές με αντίστροφους κυλίνδρους.....	43
15. ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13 Μηχανές V.....	46
16. Επίλογος.....	51
17. Βιβλιογραφία.....	52

## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Μια μηχανή αποτελείται από κινούμενα μέρη μέσα σε ακίνητο πλαίσιο. Η σωστή ζυγοστάθμιση μιας μηχανής αποσκοπεί στη μη μεταφορά ταλαντώσεων από τα κινητά μέρη της μηχανής στο πλαίσιο.

Μια κακή ζυγοστάθμιση στη μηχανή έχει ως αποτέλεσμα την αυξημένη παραγωγή θορύβων, κραδασμών και συντονισμών που προκαλούν δυσφορία στον άνθρωπο, μειώνουν την απόδοση της μηχανής και επιφέρουν την ταχύτερη φθορά της.

Η σπουδαιότητα της ζυγοστάθμισης και ο τρόπος πραγματοποίησής της αποτελεί τον σκοπό αυτής της πτυχιακής εργασίας.

Αρχικά ασχολούμαστε με βασικές έννοιες και μεθόδους ανάλυσης δυνάμεων και ζευγών δυνάμεων όπως αυτές εμφανίζονται σε κινούμενα μέρη μηχανών (π.χ. διωστήρες).

Στη συνέχεια ασχολούμαστε με διαδικασίες σχεδίασης ή τροποποίησης μηχανών που αποσκοπούν στην κατά το δυνατόν ελαχιστοποίηση της ανισορροπίας των μηχανών με μεθόδους ανακατανομής μάζας, προσθήκης ελατηρίων, αποσβεστήρων ταλαντώσεων και μηχανισμών ζυγοστάθμισης.

Οι βασικοί τύποι ανισορροπίας μιας μηχανής εμφανίζονται κατά τη στρέψη και κατά την παλινδρόμηση των εξαρτημάτων της. Οι δύο αυτοί τύποι ανισορροπίας θα μας απασχολήσουν στη συνέχεια της εργασίας.

Ειδικότερα θα ασχοληθούμε με τη ζυγοστάθμιση του ρότορα, τη στατική και δυναμική ζυγοστάθμιση, και τη ζυγοστάθμιση διαφόρων τύπων παλινδρομικών μηχανών.

## INTRODUCTION

A machine consists of moving parts in frame. Proper balancing of a machine impedes transfer of vibratory motion of the moving parts of the engine to the frame.

The result of an unbalanced engine is the increased production of noises, vibrations and resonances which cause discomfort to humans, reduces the efficiency of the machine and result in faster wear.

The importance of balancing and the procedure followed is the purpose of this work.

First we deal with basic concepts and methods of analysis of forces and couples of forces as they appear in moving parts (eg: connecting rods ).

Then we deal with design procedures on engine modification , designed to minimize as far as possible the imbalance of machines with methods as: mass redistribution , adding springs, dampers and balance mechanisms.

The main types of imbalance of a machine appear in torsion and in the reciprocating motion of the engine's components. These two types of imbalance will concern us later in the work.

In particular we will deal with the balancing of the rotor, the static and dynamic balancing, and balancing different types of reciprocating engines.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

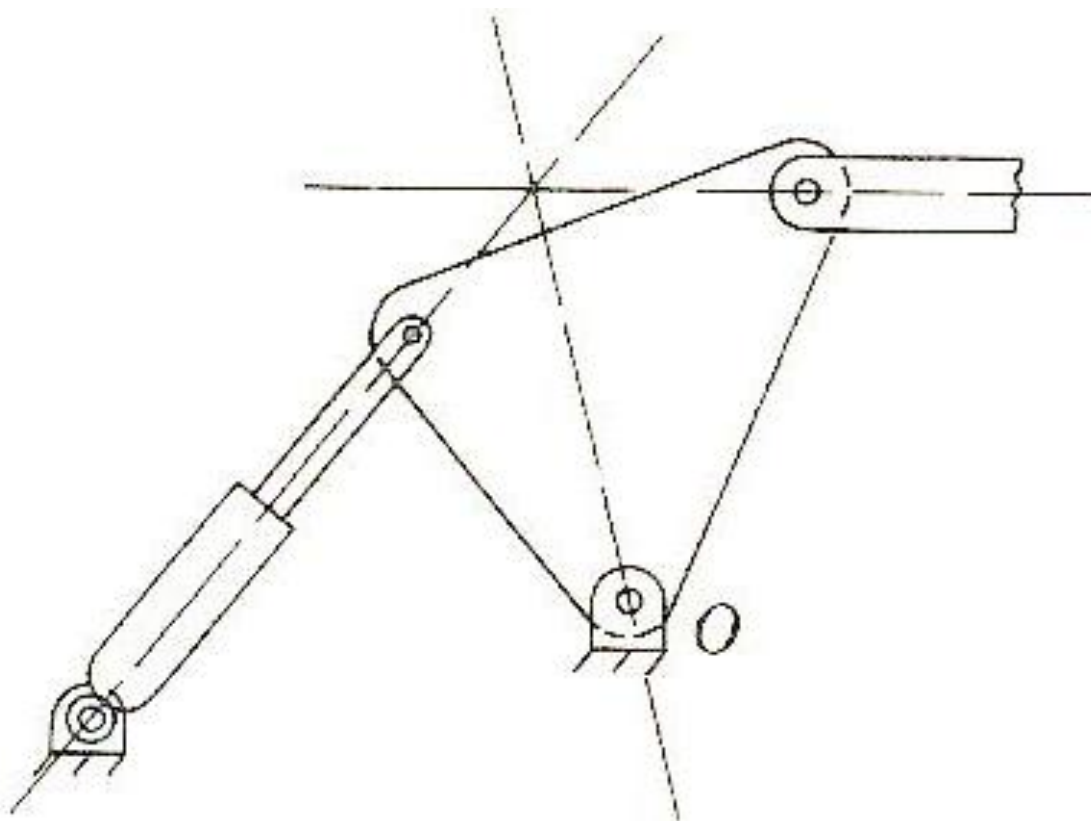
### Ανάλυση ενός μέλους υπό την επίδραση δυνάμεων και ενός ζεύγους

Σε μια ανάλυση δυνάμεων είναι αναγκαίο να γνωρίζουμε τη φύση των δυνάμεων που ενεργούν στο σύστημα ή που δρουν σαν φορτία στο σύστημα. Γνωρίζοντας μόνο που και πως αυτές οι δυνάμεις ενεργούν μπορούμε να προχωρήσουμε σε πλήρη ανάλυση των φορτίων του συστήματος.

Σε αυτό το σημείο μπορούμε να σχεδιάσουμε το σύστημα λαμβάνοντας υπόψιν τους δύο παρακάτω τρόπους:

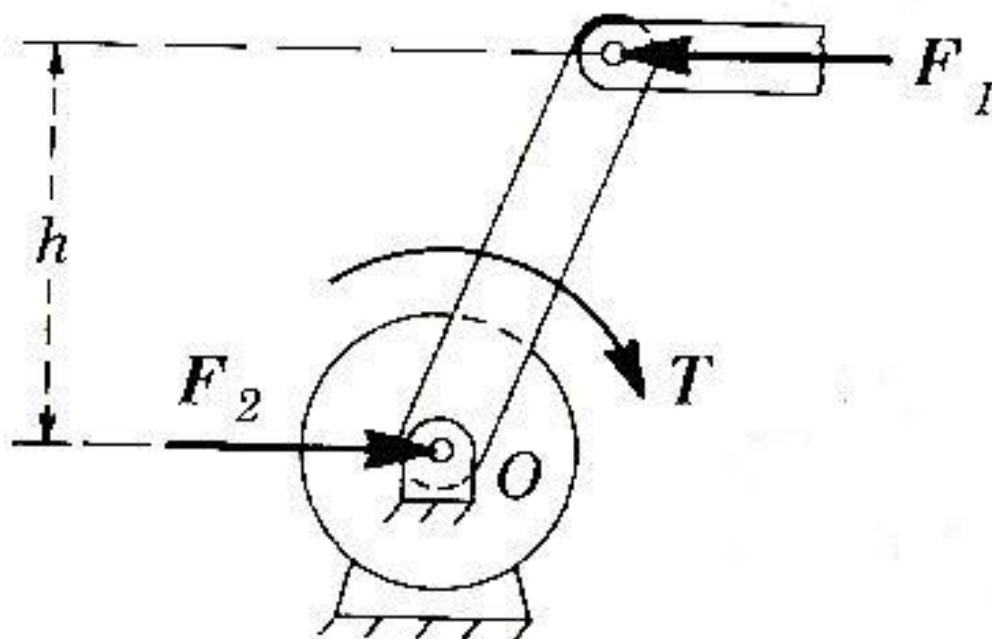
(σχήμα 1.1 και σχήμα 1.2)

Στο σχήμα 1.1 ο στρόφαλος κινείται από ένα υδραυλικό πιστόνι τοποθετημένο στο σημείο που φαίνεται. Σε αυτή την περίπτωση ο στρόφαλος αποτελεί σύστημα τριών δυνάμεων.



Σχήμα 1.1: Ο στρόφαλος κινείται από ένα πιστόνι και είναι σύστημα τριών δυνάμεων.

Αν από την άλλη ο στρόφαλος κινείται από έναν άξονα συνδεδεμένο σε έναν ηλεκτρικό κινητήρα όπως φαίνεται στο σχήμα 1.2, τότε η εφαρμοσμένη ροπή στρέψης του άξονα παίρνει τη μορφή του ζεύγους. Και οι δύο αυτοί οδηγοί των συστημάτων μπορούν να σχεδιαστούν για να παράγουν την ίδια ροπή στρέψης στο σημείο O, ενώ οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο στρόφαλο θα διαφέρουν στις δύο περιπτώσεις.



Σχήμα 1.2: Ο στρόφαλος κινείται από ένα ηλεκτρικό μοτέρ και είναι ζεύγος δύο δυνάμεων και μιας ροπής στρέψης.

Για την ισορροπία ενός συστήματος που εφαρμόζονται δύο δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  συν ενός ζεύγους, οι δυνάμεις  $F_1$  και  $F_2$  πρέπει να σχηματίζουν ένα ζεύγος που θα είναι ίσο και αντίθετο με το εφαρμοζόμενο. Επίσης, αν είναι γνωστό το μέτρο και η διεύθυνση της  $F_1$  τότε η  $F_2$  θα έχει ίσο μέτρο, παράλληλη διεύθυνση και αντίθετη φορά. Η ροπή του εφαρμοζόμενου ζεύγους πρέπει να είναι ίση και αντίθετη με τη ροπή του ζεύγους  $F_1$  και  $F_2$ . Αυτό φαίνεται στο σχήμα 1.2, στο οποίο το μέτρο του ζεύγους  $T$  είναι ίσο με το γινόμενο  $hF_1=hF_2$ .

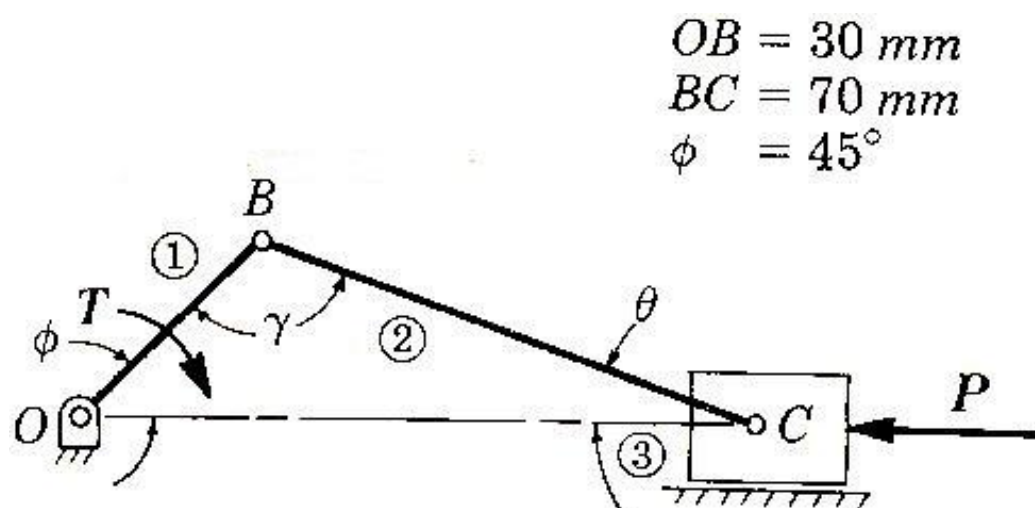
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

### Γραφική ανάλυση δυνάμεων ενός διωστήρα

Ο διωστήρας βρίσκει εφαρμογή σε παλινδρομικούς συμπιεστές, μηχανές με πιστόνια και άλλα μηχανήματα, στα οποία τα χαρακτηριστικά των δυνάμεων είναι σημαντικά. Η ανάλυση των δυνάμεων αυτού του μηχανισμού παρουσιάζεται στα παρακάτω παραδείγματα.

#### Παράδειγμα 1:

Γίνεται ανάλυση στατικών δυνάμεων συστήματος (εμβόλου - διωστήρα - στροφάλου). Θεωρούμε ότι το παρακάτω σχήμα απεικονίζει συμπιεστή, ο οποίος λειτουργεί σε τόσο χαμηλή ταχύτητα, όπου η αδράνεια θεωρείται αμελητέα.



Σχήμα 2.1: Γραφική ανάλυση δυνάμεων του συστήματος, το οποίο λειτουργεί βάση δυνάμεως  $P$  του εμβόλου και της ροπής του στροφάλου  $T$ .

Επίσης είναι δεκτό ότι οι βαρυτικές δυνάμεις είναι μικρές σε σχέση με τις υπόλοιπες που εφαρμόζονται στο σύστημα και ότι όλες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Οι διαστάσεις είναι  $OB = 30\text{mm}$  και  $BC = 70\text{mm}$ . Ζητείται να βρεθεί η απαιτούμενη ροπή του στροφαλοφόρου άξονα  $T$  και οι δυνάμεις που ασκούνται στους ωστικούς τριβείς από στιγμιαία συνολική δύναμη πίεσης αερίων  $P = 40\text{N}$  και σε θέση στροφάλου  $\phi = 45^\circ$ .

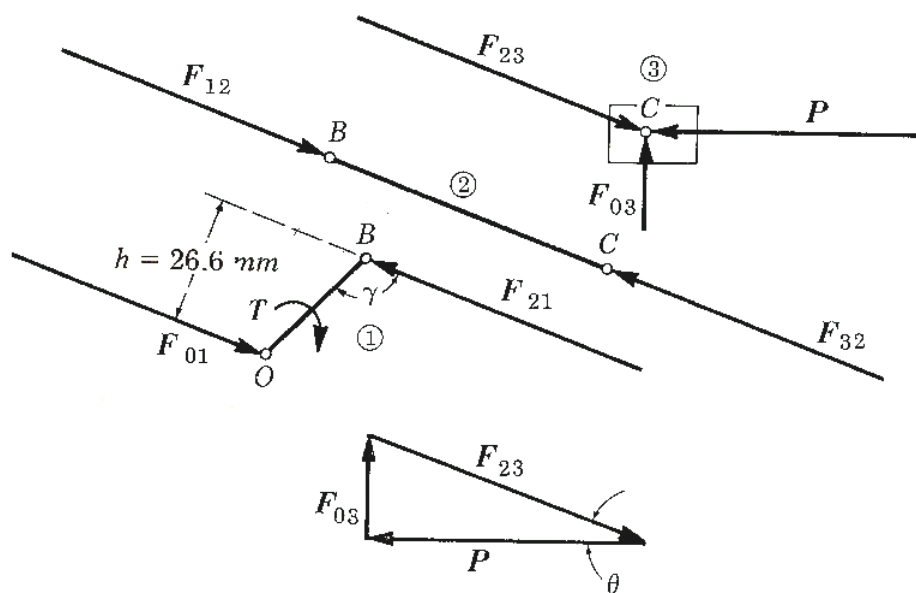
Λύση:

1. Αρχικά, θεωρούμε διωστήρα 2 με απουσία βαρυτικών δυνάμεων και αδράνειας, στο διωστήρα δρουν δύο δυνάμεις στους πείρους  $B$  και  $C$ . Αυτοί οι πείροι θεωρείται ότι δεν έχουν τριβή και επομένως δεν φέρουν ροπή. Στο σύνδεσμο 2 εφαρμόζονται δύο δυνάμεις σε κάθε άκρο της ράβδου όπως φαίνεται. Οι δυνάμεις  $F_{12}$  και  $F_{32}$  βρίσκονται πάνω στον σύνδεσμο παράγοντας μηδενική ροπή και πρέπει να είναι ίσες και αντίθετες για την

ισορροπία του συνδέσμου. Το μέτρο και η κατεύθυνση αυτών των δυνάμεων είναι άγνωστη.

2. Στη συνέχεια, εξετάζουμε το έμβολο 3, το οποίο δέχεται τρεις δυνάμεις. Η δύναμη που ασκείται λόγω πίεσης  $P$  είναι γνωστή και εφαρμόζεται διαμέσου του κέντρου του εμβόλου (θεωρείται ότι η άσκηση πίεσης στο πρόσωπο του εμβόλου είναι συμμετρική). Από τον 3<sup>ο</sup> νόμο του Νεύτωνα, ο οποίος λέει ότι σε κάθε δράση υπάρχει ίση και αντίθετη αντίδραση, άρα συνεπάγεται ότι  $F_{23} = -F_{32}$  και η κατεύθυνση της  $F_{23}$  είναι γνωστή. Όταν υπάρχει απουσία τριβής, η δύναμη του κυλίνδρου στο έμβολο  $F_{03}$  είναι κάθετη στο τείχος του κυλίνδρου και επίσης πρέπει να περνάει από το σημείο τομής το οποίο είναι ο πείρος του εμβόλου  $C$ . Πλέον γνωρίζοντας την κατεύθυνση των δυνάμεων μπορούμε να σχεδιάσουμε το πολύγωνο δυνάμεων (σχήμα 2.2). Παρατηρώντας το σχήμα, η δύναμη επαφής μεταξύ του κυλίνδρου και του πιστονιού είναι  $F_{03} = 12.7\text{N}$  και δρα προς τα πάνω. Το μέτρο της δύναμης στο πείρο  $C$  είναι  $F_{23} = F_{32} = 42\text{N}$ . Την ίδια δύναμη δέχεται και ο πείρος  $B$ , διότι  $F_{12} = -F_{32}$ .
3. Τελικά, ο στρόφαλος 1 υποβάλλεται σε δυο δυνάμεις και ένα ζεύγος  $T$  (η ροπή  $T$  του άξονα οφείλεται σε ζεύγος). Η δύναμη στον πείρο  $B$  είναι  $F_{21} = -F_{12}$  και πλέον είναι γνωστή. Για την ισορροπία των δυνάμεων πρέπει  $F_{01} = -F_{21}$ , όπως φαίνεται στο διάγραμμα ελεύθερου σώματος. Ωστόσο αυτές οι δυνάμεις δεν είναι στην ίδια διεύθυνση και ισορροπούν μέσω της ροπής  $T$ , η οποία είναι δεξιόστροφη και έχει μέγεθος:

$$T = F_{21}h = (42.0\text{N})(26.6\text{mm}) = 1120\text{ Nmm} = 1.12\text{Nm}$$



Σχήμα 2.2: Στατική δύναμη ζυγοστάθμισης για τρεις κινούμενους δοκούς, όπου κάθε μία από αυτές θεωρείται ελεύθερα κινούμενο σώμα.

Πρέπει να δώσουμε έμφαση στο ότι η ροπή είναι απαραίτητη για τη στατική ισορροπία, στη θέση που φαίνεται στο σχήμα 2.1, και για την ολοκλήρωση του κύκλου συμπίεσης. Βέβαια απαιτείται η επανάληψη της διαδικασίας σε διάφορα σημεία του κύκλου κίνησης. Γενικά η ροπή διαφέρει σε κάθε σημείο του κύκλου.



## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

### Αναλυτική επίλυση μηχανισμού διωστήρα

Εξαιτίας της εκτεταμένης χρήσης του διωστήρα, απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή. Σε επόμενο κεφάλαιο, θα αναλύσουμε λεπτομερώς τις δυναμικές φορτίσεις στο συγκεκριμένο μηχανισμό, που επηρεάζουν την αδράνεια, η οποία είναι συχνά σημαντική σε μηχανές όπως οι μηχανές εσωτερικής καύσης και οι συμπιεστές. Σε αυτό το κεφάλαιο η ανάλυση στους άξονες  $x, y$  των στατικών δυνάμεων έχει ήδη παρουσιαστεί για να καθορίσει τη σχέση μεταξύ της δύναμης που δέχεται το έμβολο και της ροπής του στρόφαλου. Σε αυτήν την ενότητα, θα παρουσιαστεί αναλυτικά ένα ισοδύναμο μοντέλο.

Ένας οριζόντιος διωστήρας φαίνεται στο σχήμα 3.1 με μήκος στρόφαλου  $r$ , μήκος διωστήρα  $l$  και δύναμη εμβόλου  $P$ . Υπάρχει μια μαθηματική σχέση που συσχετίζει τη δύναμη  $F$  του στροφαλοφόρου άξονα και τη ροπή του  $T$  για την επίτευξη ισορροπίας, η οποία μας δείχνει τη λειτουργία του μηχανισμού σε γωνία στρόφαλου  $\varphi$ .

Τα ελεύθερα σώματα των κινούμενων συνδετήριων ράβδων φαίνονται στο σχήμα 3.2. Ο διωστήρας 2 δέχεται δύο δυνάμεις, άρα η δύναμη που ασκεί το έμβολο 3, η  $F_{23}$ , δρα σε γωνία  $\theta$  του διωστήρα. Αθροίζοντας τις δυνάμεις κατά άξονα  $x$ , έχουμε:

$$F_{23} \cos\theta = P \quad 3.1$$

Η

$$F_{23} = \frac{P}{\cos\theta}$$

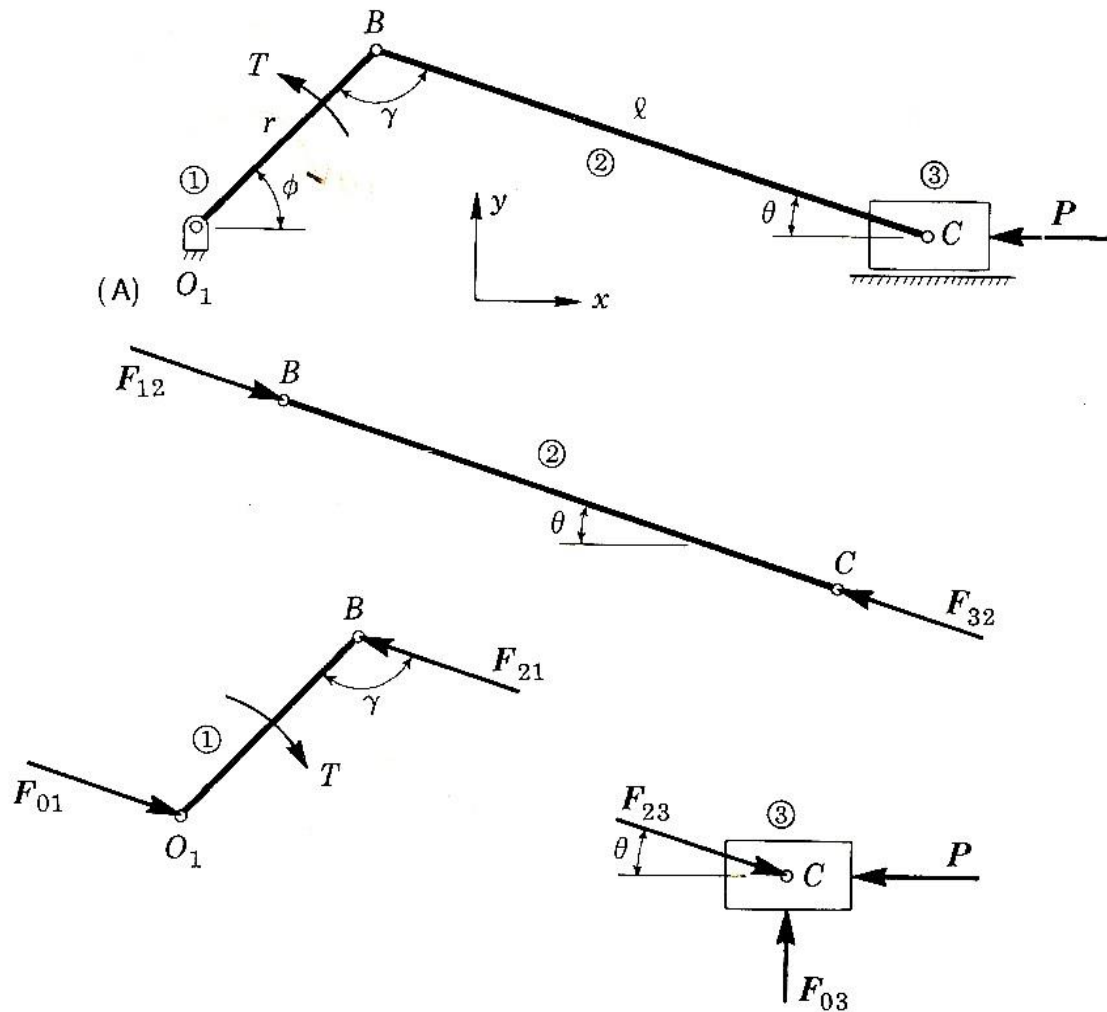
Έπειτα λαμβάνοντας υπόψιν το στρόφαλο:

$$F_{21} \frac{P}{\cos\theta} \quad 3.2$$

Και βρίσκουμε τη ροπή που ασκείται στο σημείο  $O$

$$T = - F_{21} r \cos(\gamma-90) = - F_{21} r \sin\gamma \quad 3.3$$

Το αρνητικό πρόσημο υποδηλώνει ότι η ροπή είναι δεξιόστροφη και η «θετική» δύναμη  $P$  δρα προς τα αριστερά.



Σχήμα 3.1: Μηχανισμός διωστήρα σε σειρά.

Σχήμα 3.2: Ανάλυση των μελών του μηχανισμού διωστήρα χωριστά για ροπή  $T$  και δύναμη άσκησης εμβόλου  $P$ .

Αντικαθιστώντας τους τύπους έχουμε:

$$\gamma = 180^\circ - (\phi + \theta)$$

και από τις σχέσεις 3.2 και 3.3:

$$T = -\frac{Pr}{\cos\theta} \sin [180^\circ - (\phi + \theta)] = -Pr(\sin\phi + \cos\phi \tan\theta) \quad 3.4$$

Τελικά, η γωνία  $\theta$  εξαρτάται από τη γωνία του στρόφαλου  $\phi$ . Από τη γεωμετρία του μηχανισμού έχουμε:

$$\sin\theta = \frac{r}{l} \sin\varphi$$

και

$$\cos\theta = \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{r}{l} \sin\varphi\right)^2}$$

$$T = -Pr \sin\varphi \left(1 + \frac{r \cos\varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2\varphi}}\right) \quad 3.5$$

Όπως φαίνεται, ακόμα και αν η δύναμη  $P$  είναι συνεχής, η ροπή  $T$  θα διαφέρει όσο ο προσανατολισμός του μηχανισμού αλλάζει. Φυσικά, σε ΜΕΚ και συμπιεστές, η δύναμη  $P$  αναπαριστά τη δύναμη πίεσης στο θάλαμο συμπίεσης και διαφέρει επίσης ανάλογα με τη θέση. Έτσι η  $P$  μπορεί να εκφραστεί σα συνάρτηση της γωνίας  $\varphi$ . Επιπλέον η ροπή μηδενίζεται για γωνία  $\varphi = 0$  ή  $\varphi = 180^\circ$ , εκφράζοντας το άνω και κάτω νεκρό σημείο του μηχανισμού. Αυτό σημαίνει ότι ο μηχανισμός μπορεί να «κλειδώσει» σε αυτές τις θέσεις υπό την επίρεια της  $P$ , εκτός αν δεχτεί άλλες δυνάμεις όπως η αδράνεια ή ροπή από άλλους κυλίνδρους.

### **Παράδειγμα 2:**

Υπολογίζουμε τη ροπή που απαιτείται για στατική ισορροπία σε ένα κάθετο διωστήρα σε θέση όπου ο στρόφαλος σχηματίζει γωνία  $\varphi = 45^\circ$ . Οι διαστάσεις είναι  $r = 30\text{mm}$ ,  $l = 70\text{mm}$  και δύναμη εμβόλου  $P = 40\text{N}$ .

Λύση:

Αντικαθιστώντας στη σχέση 3.5 έχουμε:

$$T = - (40)(30) \sin(45^\circ) \left[1 + \frac{30 \cos(45^\circ)}{\sqrt{(70)^2 - (30)^2 \sin^2(45^\circ)}}\right] = - 1119\text{Nmm}$$

Αυτό το αποτέλεσμα συμφωνεί με τη γραφική επίλυση του παραδείγματος 1.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

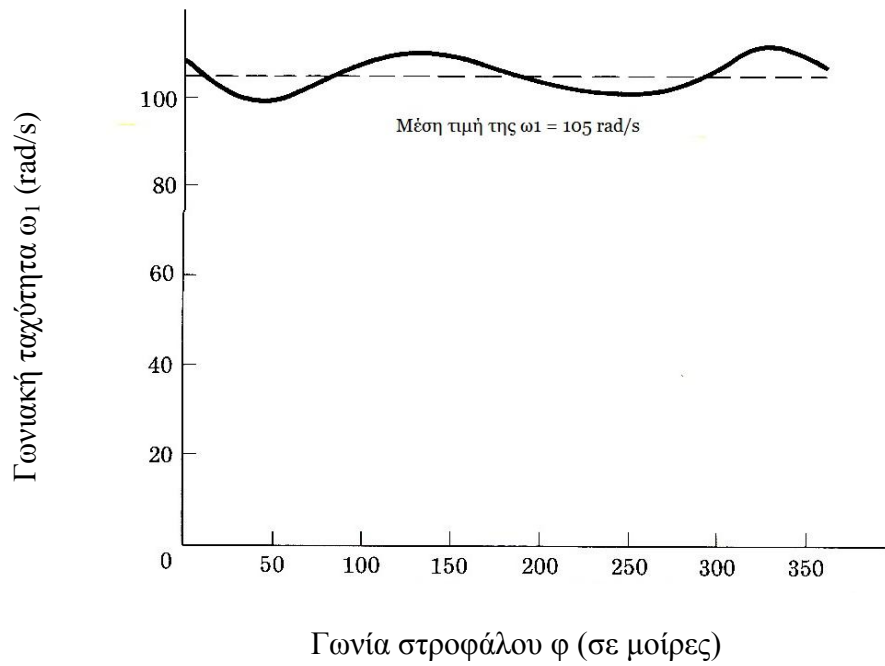
### Ζυγοστάθμιση των μηχανών

Σε αυτό το σημείο θα αναλύσουμε τις δυναμικές φορτίσεις που μεταφέρονται στα πλαίσια των μηχανών. Κάποια από τα σημαντικά προβλήματα που συναντώνται σε πολύστροφες μηχανές είναι αποτέλεσμα αυτών των φορτίσεων. Οι δυνάμεις που ασκούνται στο πλαίσιο από τα κινητά μέρη της μηχανής διαφέρουν ανάλογα με τη θέση τους και μεταφέρουν δονητικές κινήσεις στο πλαίσιο. Αυτή η δόνηση και ο θόρυβος που τη συνοδεύει μπορούν να προκαλέσουν δυσφορία στον άνθρωπο, να μεταβάλουν την επιθυμητή απόδοση της μηχανής και να επηρεάσουν αρνητικά τη δομική ακεραιότητα της μηχανής. Επιπλέον, αυτά τα προβλήματα αυξάνουν από τη μια την ταχύτητα λειτουργίας, η οποία οδηγεί σε μεγαλύτερες δυνάμεις αδράνειας, και από την άλλη οδηγούν σε συντονισμό λόγω κρίσιμης ταχύτητας λειτουργίας.

Μια καθαρή μη ισοσταθμισμένη δύναμη δρα στο σκελετό της μηχανής ή του μηχανισμού (π.χ. το επακόλουθο μιας δύναμης που μεταφέρεται σε όλους τους συνδέσμους μεταξύ της μηχανής και του πλαισίου) και ονομάζεται δύναμη δόνησης. Επίσης, το αποτέλεσμα μιας μη ισοσταθμισμένης δύναμης, που δρα μια συγκεκριμένη στιγμή στο πλαίσιο ονομάζεται στιγμή δόνησης. Άρα, η δύναμη δόνησης και η στιγμή δόνησης δρουν στο πλαίσιο, προκαλώντας δόνηση με μέγεθος που εξαρτάται από το ποσό της ανισορροπίας. Επομένως, για να ελαχιστοποιηθεί η ανισορροπία στις μηχανές πρέπει να γίνεται σωστή σχεδίαση.

Η διαδικασία της σχεδίασης ή τροποποίησης των μηχανών στοχεύει στο να μειωθεί η ανισορροπία σε ένα αποδεκτό όριο ή να εξαλειφτεί εφόσον είναι δυνατόν. Αυτό ονομάζεται ζυγοστάθμιση. Από τη στιγμή που η ανισορροπία εξαρτάται κυρίως από τις δυνάμεις αδράνειας σε συνάρτηση με τις κινούμενες μάζες της μηχανής, η συνηθέστερη προσέγγιση στην ζυγοστάθμιση είναι η ανακατανομή της μάζας, με προσθήκη ή αφαίρεση αυτής από διάφορα μέλη της μηχανής. Ωστόσο χρησιμοποιούνται κι άλλες τεχνικές, όπως η προσθήκη ελατηρίων, αποσβεστήρων ταλαντώσεων και μηχανισμών ζυγοστάθμισης.

Η μέθοδος που χρησιμοποιείται για ζυγοστάθμιση εξαρτάται σε σημαντικό βαθμό από τον τύπο της ανισορροπίας που εμφανίζεται στην κάθε μηχανή. Οι δύο βασικοί τύποι ανισορροπίας εμφανίζονται κατά την στρέψη και την παλινδρόμηση, είτε ξεχωριστά είτε ταυτόχρονα. Οι δύο αυτοί τύποι αναλύονται εκτενώς στα επόμενα κεφάλαια.



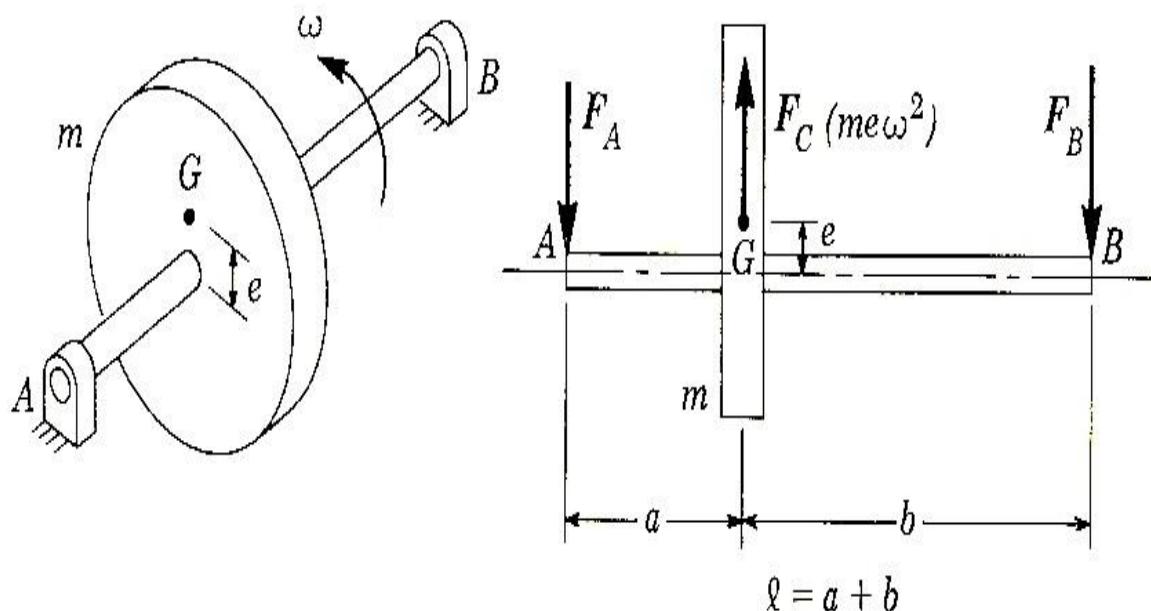
Σχήμα 4.1: Η γωνιακή ταχύτητα του στρόφαλου σε σχέση με τη γωνία του στρόφαλου για το μηχανισμό του διωστήρα του παραδείγματος. Ο μέσος όρος της γωνιακής ταχύτητας είναι 105 rad/s

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

### Ζυγοστάθμιση ρότορα

Στην εισαγωγή αυτού του κεφαλαίου το παράδειγμα της δυναμικής φόρτισης που παρουσιάζεται, είναι μια φυγόκεντρος δύναμη μιας μάζας που βρίσκεται πάνω σε μια περιστρεφόμενη ράβδο. Το ίδιο είδος δύναμης εμφανίζεται και σε ένα ηλεκτρικό ρότορα. Και στις δύο περιπτώσεις, τα έδρανα που βρίσκονται στο πλαίσιο της μηχανής δέχονται μια μη ζυγοσταθμισμένη δύναμη που προκαλεί δόνηση. Ο τύπος της ανισορροπίας, που οφείλεται με μια περιστρεφόμενη μάζα, ονομάζεται ανισορροπία λόγω περιστροφής και από τη στιγμή που πρακτικά όλες οι μηχανές περιέχουν περιστρεφόμενα μέρη αυτός ο τύπος ανισορροπίας είναι πολύ κοινός. Αυτό συμβαίνει για παράδειγμα σε πολλές εφαρμογές όπως ρότορες ατμοστροβίλων, στροφαλοφόροι άξονες μηχανών κτλ. Ευτυχώς, η ανισορροπία λόγω περιστροφής αντιμετωπίζεται πολύ εύκολα.

Πριν παρουσιάσουμε γενικές μεθόδους ζυγοστάθμισης, θα εξετάσουμε το παρακάτω παράδειγμα με περισσότερες λεπτομέρειες. Στο σχήμα 5.1 φαίνεται ένας ρότορας που αποτελείται από μια μάζα σε σχήμα δίσκου  $m$  που βρίσκεται πάνω σε έναν άξονα αμελητέας μάζας. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι ο ρότορας έχει γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Το κέντρο μάζας  $G$  δεν συμπίπτει με το κέντρο των εδράνων  $AB$  και το μέτρο της εκκεντρότητας συμβολίζεται με  $e$ . Σύμφωνα με την αρχή του d'Alembert, ο ρότορας δέχεται την φυγόκεντρο δύναμη  $F_c$ , η οποία έχει μέγεθος ίσο με  $m\omega^2 e$ .



Σχήμα 5.1: Στατική ανισορροπία που οφείλεται σε μια έκκεντρη μάζα σε ένα περιστρεφόμενο άξονα.

Αθροίζοντας δυνάμεις και ροπές στο ρότορα, βρίσκουμε ότι η αντίδραση των εδράνων στον άξονα είναι:

$$F_A = \left(\frac{b}{l}\right)m\omega^2$$

και

$$F_B = \left(\frac{a}{l}\right)m\omega^2$$

Οι δυνάμεις αυτές δρουν με την κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Η καθαρή δύναμη που δέχεται το πλαίσιο συμβολίζεται με  $F_S$  και θα έχει μέτρο :

$$F_S = F_B + F_A = F_C$$

$$F_S = \left(\frac{a}{l}\right)m\omega^2 + \left(\frac{b}{l}\right)m\omega^2 = \left(\frac{a+b}{l}\right)m\omega^2 = m\omega^2$$

και με κατεύθυνση που προκαλεί περιστροφή ταχύτητας  $\omega$ . Έτσι η φυγόκεντρος δύναμη μεταδίδεται απευθείας στο πλαίσιο. Να σημειώσουμε επίσης ότι αν η γωνιακή ταχύτητα διπλασιαστεί, η δύναμη που προκαλεί δόνηση τετραπλασιάζεται.

Η ανισορροπία που περιγράφηκε προηγουμένως είναι πολύ εύκολο να την εντοπίσουμε. Για παράδειγμα, αν ο άξονας ήταν οριζόντιος, ο ρότορας θα ήταν συνέχεια σε μια σταθερή θέση με το σημείο G κάτω από το ύψος των εδράνων λόγω βαρύτητας. Οποιαδήποτε ανισορροπία λόγω περιστροφής, που μπορεί να εντοπιστεί σε μια στατική δοκιμή, όπως αυτή που παρουσιάστηκε παραπάνω, αναφέρεται σε μια στατική ανισοστάθμιση.

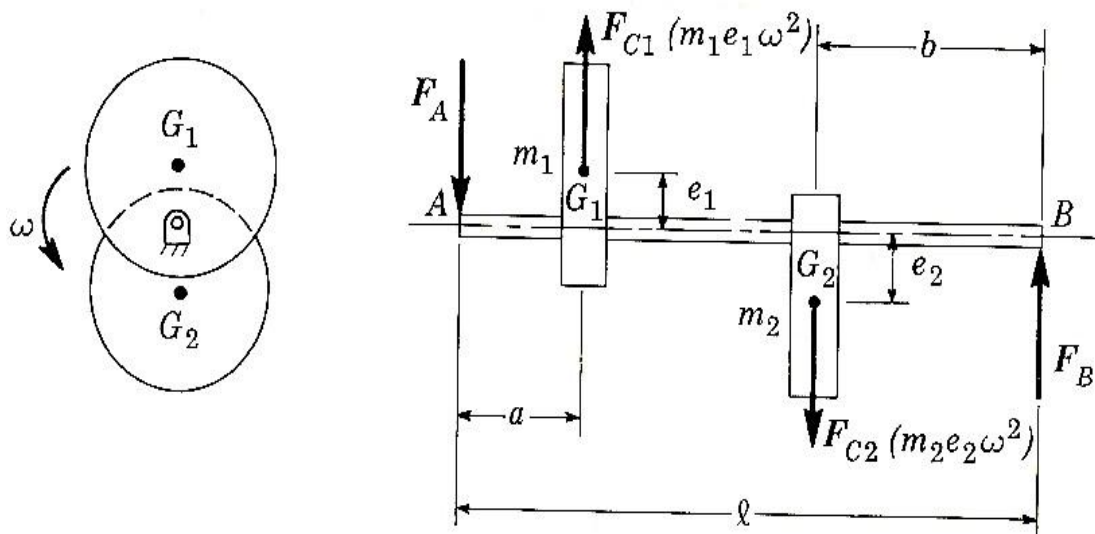
Η στατική ανισοστάθμιση μπορεί να εντοπιστεί μέσω μιας στατικής δοκιμής, αλλά και να διορθωθεί μέσω μιας στατικής διαδικασίας. Ένα παράδειγμα είναι η διαδικασία ζυγοστάθμισης των ροδών ενός αυτοκινήτου, η συσκευή που χρησιμοποιείται για τη συγκεκριμένη ζυγοστάθμιση καθορίζει τη θέση και το μέτρο της ανισορροπίας, έτσι ώστε να τοποθετήσουμε μια μάζα που θα μηδενίσει την ανισορροπία.

Σε αντίθεση με την περίπτωση του σχήματος 5.1, ο ρότορας του σχήματος 5.2 έχει δύο δίσκους με μάζες  $M_1$  και  $M_2$  και εκκεντρότητες  $E_1$  και  $E_2$ . Θεωρούμε ότι τα κέντρα μάζας  $G_1$  και  $G_2$  των δίσκων έχουν διαφορά  $180^\circ$  όπως φαίνεται στο σχήμα. Επίσης θεωρούμε σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  και τη μάζα του άξονα αμελητέα. Έτσι η αντίδραση των εδράνων είναι :

$$F_A = \left(\frac{\omega^2}{l}\right) [m_1 e_1 (l-a) - m_2 e_2 b]$$

Και

$$F_B = \left(\frac{\omega^2}{l}\right) [m_2 e_2 (l-b) - m_1 e_1 a]$$



Σχήμα 5.2: Ταυτόχρονη στατική και δυναμική ανισορροπία που οφείλεται σε εκκεντρες μάζες σε πολλαπλές αξονικές θέσεις στον περιστρεφόμενο άξονα

Η κατεύθυνση αυτών των δυνάμεων βασίζεται στα πρόσημα των παραπάνω εξισώσεων, αν είναι θετικό τότε η δύναμη έχει προσανατολισμό όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2, αν είναι αρνητικό τότε η κατεύθυνση της δύναμης είναι αντίθετη. Αυτές οι δυνάμεις περιστρέφονται γύρω από το κέντρο των εδράνων με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Το μέτρο της δύναμης που προκαλεί δόνηση είναι :

$$F_S = |F_A - F_B| = \omega^2 |m_1 e_1 - m_2 e_2|$$

και αν  $m_1 e_1 = m_2 e_2$ , τότε η δύναμη που προκαλεί δόνηση ισούται με 0. Ωστόσο, αν και το αποτέλεσμα των δυνάμεων στο πλαίσιο της μηχανής είναι μηδέν, οι μεμονωμένες δυνάμεις στα έδρανα δεν είναι μηδέν, τα μέτρα τους είναι ίσα και υπολογίζονται από την παρακάτω σχέση :

$$F_A = F_B = \left( \frac{m_1 e_1 \omega^2}{l} \right) [l - (a + b)]$$

αλλά έχουν αντίθετες φορές, όπως φαίνεται στο σχήμα 5.2. Άρα υπάρχει ακόμα ένα ζεύγος, ή ζεύγος δόνησης, το οποίο δρα στο πλαίσιο και τείνει να του προξενήσει περιστροφική δόνηση. Γενικά ζεύγη δόνησης εμφανίζονται όταν ανισόρροπες μάζες βρίσκονται σε πολλαπλές αξονικές θέσεις στο ρότορα.

Η ανισοστάθμιση που φαίνεται στο σχήμα 5.2 με  $m_1 e_1 = m_2 e_2$  δεν μπορεί να εντοπιστεί σε ένα στατικό τεστ. Για παράδειγμα ο ρότορας θα πάρει τυχαίους προσανατολισμούς στο βαρυτικό τεστ που περιγράψαμε παραπάνω. Τέτοια ανισορροπία μπορεί να εντοπιστεί μέσω δυναμικού τεστ στο οποίο ο ρότορας περιστρέφεται και ως εκ τούτου αυτό αναφέρεται σαν δυναμική ανισορροπία. Επίσης μια διαδικασία στατικής ζυγοστάθμισης δε θα διορθώσει αυτού του είδους την ανισορροπία, και ένας στατικά ισοσταθμισμένος ρότορας μπορεί να λειτουργεί με



χαμηλές αποδόσεις σε πραγματικές συνθήκες. Σε τέτοια περίπτωση η δυναμική ζυγοστάθμιση απαιτείται, όπου ο ρότορας περιστρέφεται με αυθαίρετη ταχύτητα και οι δυνάμεις στα έδρανα μπορούν να μετρηθούν. Από τη συγκεκριμένη πληροφορία τα μεγέθη και οι θέσεις των διορθωτικών αντίβαρων προσδιορίζονται.

Από το παραπάνω θέμα, μπορούμε να δούμε ότι η δυναμική ανισοστάθμιση μπορεί να γίνει πιο σημαντική σε περιπτώσεις όπου ρότορες έχουν κατανεμημένες μάζες σε σχετικά μεγάλες αξονικές αποστάσεις. Για παράδειγμα, η στατική ζυγοστάθμιση είναι ικανοποιητική σε περιπτώσεις όπως: ρόδες αυτοκινήτων ή σε ανεμιστήρες σπιτιών οι οποίοι έχουν μικρές ακτινικές αποστάσεις. Σε αντίθεση η δυναμική ζυγοστάθμιση πρέπει να εφαρμόζεται σε περιπτώσεις όπως στροφαλοφόροι άξονες αυτοκινήτων και ρότορες στροβίλων πολλών σταδίων, οι οποίοι έχουν μεγάλες ακτινικές αποστάσεις. Γενικά και στις δύο περιπτώσεις ανισορροπίας θα παρουσιάζεται κάποιου βαθμού απόκλιση, με τη στατική ανισορροπία παράγεται μια καθαρή δύναμη δόνησης και με τη δυναμική ανισορροπία παράγεται ένα ζεύγος δόνησης.

Από προηγούμενη αναφορά, γενικά η ζυγοστάθμιση τοποθετώντας σωστές ποσότητες μάζας σε σωστά σημεία σε ρότορες βασίζεται στα παρακάτω κριτήρια:

1. Στη στατική ζυγοστάθμιση οι δυνάμεις που προκαλούν δόνηση θα πρέπει να είναι μηδέν.
2. Στη δυναμική ζυγοστάθμιση οι δυνάμεις που προκαλούν δόνηση και οι ροπές που προκαλούν δόνηση πρέπει να είναι μηδέν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

### Στατική ζυγοστάθμιση

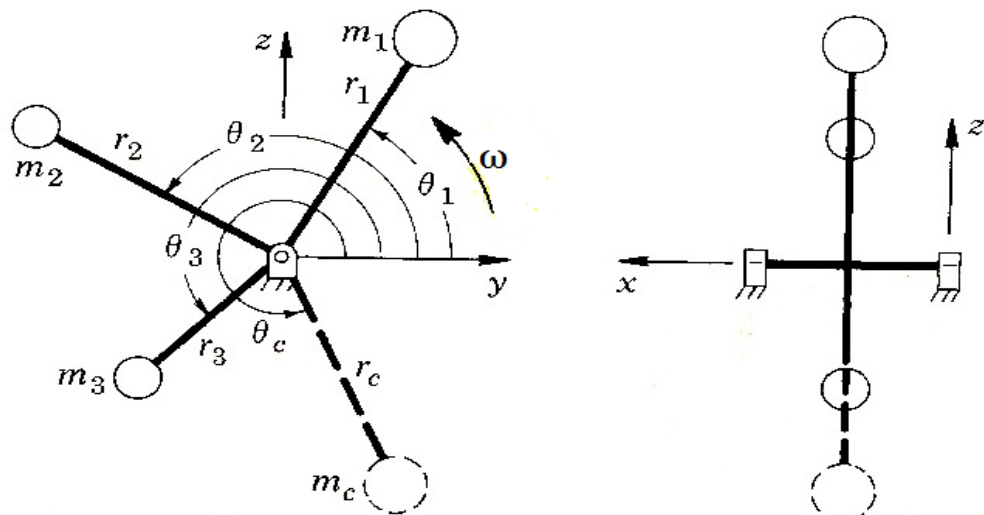
Θεωρούμε ότι ο ρότορας που φαίνεται στο σχήμα 6.1 περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Οι ανισόρροπες μάζες συμβολίζονται σαν σημειακές μάζες  $m$  με ακτινικές αποστάσεις  $r$ . Αυτό μπορεί να παρουσιάσει μια ποικιλία από πραγματικές καταστάσεις περιστρεφόμενων μαζών, συμπεριλαμβανομένου στροβίλων, φτερωτές προπελών, κτλ.. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν τρεις μάζες, αλλά ο αριθμός των μαζών μπορεί να είναι οποιοσδήποτε. Εδώ θεωρείται ότι όλες οι μάζες βρίσκονται σε μονό εγκάρσιο επίπεδο, στην ίδια ακτινική θέση κατά μήκος του άξονα, ή είναι τόσο κοντά στο ίδιο επίπεδο όπου η δυναμική ανισορροπία θεωρείται αμελητέα. Θα δούμε ότι σε αυτή την κατάσταση η ζυγοστάθμιση μπορεί να γίνει με ένα αντίβαρο τοποθετημένο στο ίδιο επίπεδο και φαίνεται στο σχήμα 6.1 με διακεκομμένες γραμμές.

Κάθε μία από τις αρχικές μάζες στο σχήμα 6.1 παράγει μια φυγόκεντρο δύναμη που δρα ακτινικά προς τα έξω από τον άξονα περιστροφής με μέγεθος ίσο με  $m_n r_n \omega^2$ ,  $n = 1, 2, 3$ . Το διανυσματικό σύνολο αυτών των δυνάμεων θα μεταφέρεται μέσω των βοηθητικών εδράνων στο πλαίσιο της μηχανής με αποτέλεσμα την ύπαρξη της δύναμης που προκαλεί δόνηση  $F_S$ , που δίνεται από τον τύπο:

$$F_S = m_1 \omega^2 r_1 + m_2 \omega^2 r_2 + m_3 \omega^2 r_3$$

Αν αυτό το άθροισμα αυτών των διανυσμάτων είναι μηδέν, τότε ο ρότορας είναι ζυγοσταθμισμένος. Γενικά αυτή η κατάσταση είναι σπάνια και θα πρέπει να τοποθετήσουμε αντίβαρο μάζας  $m_c$  όπως φαίνεται στο σχήμα 6.1 με ακτινική απόσταση  $r_c$ . Το μέγεθος και η θέση του συγκεκριμένου αντίβαρου καθορίζεται από την περίπτωση, έτσι ώστε το αποτέλεσμα των αδρανειακών δυνάμεων να είναι πλέον μηδέν. Δηλαδή:

$$m_1 \omega^2 r_1 + m_2 \omega^2 r_2 + m_3 \omega^2 r_3 + m_c \omega^2 r_c = 0 \quad 6.1$$



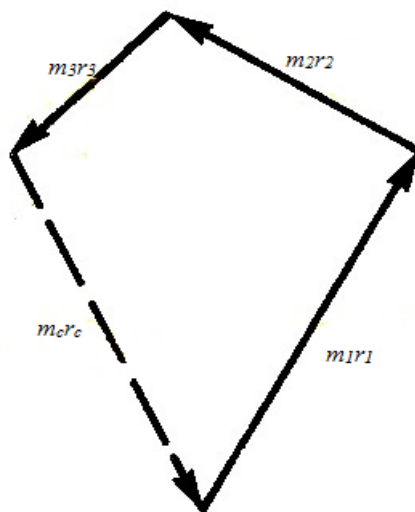
Σχήμα 6.1: Μια στατική ανισορροπία μπορεί να εξαλειφτεί τοποθετώντας ένα αντίβαρο  $m_c$  σε σωστή ακτινική απόσταση  $r_c$  και γωνία  $\theta_c$

Το μέγεθος του  $\omega^2$  μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση 6.1, αποδίδοντας την παρακάτω σχέση για στατική ισορροπία:

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_c r_c = 0 \quad 6.2$$

Η εξίσωση αυτή αποδεικνύει ότι το κέντρο των μαζών πρέπει να βρίσκεται πάνω στον άξονα στρέψης, γενικά για  $N$  αρχικές μάζες η κατάσταση ζυγοστάθμισης θα είναι:

$$\sum_{n=1}^N m_n r_n + m_c r_c = 0 \quad 6.3$$



Σχήμα 6.2: Γραφικός προσδιορισμός του μεγέθους και της τοποθεσίας των αντίβαρων.

Από τη στιγμή που όλα τα διανύσματα της σχέσης 6.2 βρίσκονται πάνω σε ένα επίπεδο, αυτό θα είναι παράλληλο στο yz επίπεδο στο σχήμα 6.1. Αυτή η εξίσωση είναι δυο-διαστάσεων διανυσματική εξίσωση και μπορεί να λυθεί με δυο παραμέτρους, το μέγεθος και την κατεύθυνση, που εξαρτώνται με κάθε αντίβαρο  $m_c$ .

Η λύση μπορεί να δοθεί είτε γραφικά είτε μαθηματικά. Στο σχήμα 6.2 φαίνεται η γραφική λύση όπου τα διανύσματα  $m_1r_1$ ,  $m_2r_2$  και  $m_3r_3$  αναπαριστώνται σε σειρά και υπό κλίμακα. Το διάνυσμα που κλείνει αυτόν τον βρόχο και ικανοποιεί την εξίσωση 6.2 είναι  $m_c r_c$ . Η κατεύθυνση του διανύσματος καθορίζει τη γωνία προσανατολισμού του αντίβαρου σε σχέση με τις άλλες μάζες. Το μέγεθος του διανύσματος είναι το μέτρο του γινομένου  $m_c r_c$ . Επίσης είτε το  $m_c$  είτε το  $r_c$  μπορεί να επιλεγθεί αυθαίρετα. Για παράδειγμα αν η μάζα  $m_c$  έχει διαλεχθεί αυθαίρετα τότε η λύση της παρακάτω σχέσης καθορίζει τη θέση του διανύσματος  $r_c$  του αντίβαρου.

Η εξίσωση 6.2 μπορεί να λυθεί επίσης μαθηματικά, αναλύοντας το σε y και z συνιστώσες:

$$\text{συνιστώσα } y : m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3 + m_c r_c \cos \theta_c = 0$$

$$\text{συνιστώσα } z : m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3 + m_c r_c \sin \theta_c = 0$$

όπου  $\theta$  εκφράζει στιγμιαίο γωνιακό προσανατολισμό σε σχέση με τον άξονα y, όπως βλέπουμε στο σχήμα 6.1. Λύνοντας ως προς  $m_c r_c$  και  $\theta_c$  έχουμε:

$$m_c r_c = [ (m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3)^2 + (m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3)^2 ]^{1/2} \quad 6.4$$

$$\theta_c = \arctan \left( \frac{-m_1 r_1 \sin \theta_1 - m_2 r_2 \sin \theta_2 - m_3 r_3 \sin \theta_3}{-m_1 r_1 \cos \theta_1 - m_2 r_2 \cos \theta_2 - m_3 r_3 \cos \theta_3} \right) \quad 6.5$$

Να σημειωθεί ότι ο αριθμητής και ο παρονομαστής του τόξου της εφαπτομένης (arctan) στην εξίσωση 6.5 θα προσδιορίσουν το σωστό τεταρτημόριο για γωνία  $\theta_c$ . Συχνά οι ρότορες ζυγοσταθμίζονται αφαιρώντας μάζα από πάνω τους, όπως τρυπώντας τους, αντί να τοποθετούνται πάνω τους αντίβαρα. Αυτό επιτυγχάνεται με την ανωτέρω διαδικασία υπολογίζοντας τη σωστή αφαίρεση μάζας. Ως εκ τούτου ο ρότορας στο σχήμα 6.1 είναι ζυγοσταθμισμένος εφόσον αφαιρέσουμε μάζα μέτρου  $m_c$  στο σημείο  $-r_c$ .

**Παράδειγμα 3:**

Ο ρότορας στο σχήμα 6.1 έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$m_1 = 3 \text{ kg} , r_1 = 80 \text{ mm} , \theta_1 = 60^\circ$$

$$m_2 = 2 \text{ kg} , r_2 = 80 \text{ mm} , \theta_2 = 150^\circ$$

$$m_3 = 2 \text{ kg} , r_3 = 60 \text{ mm} , \theta_3 = 225^\circ$$

Να προσδιοριστεί το απαιτούμενο μέτρο και η θέση του αντίβαρου ώστε να επέλθει στατική ζυγοστάθμιση.

Λύση:

Αντικαθιστώντας τις τιμές που μας δίνονται στην εξίσωση 6.4 έχουμε:

$$\begin{aligned} m_c r_c &= [ (240 \cos 60^\circ + 160 \cos 150^\circ + 120 \cos 225^\circ)^2 \\ &\quad + (240 \sin 60^\circ + 160 \sin 150^\circ + 120 \sin 225^\circ)^2 ]^{1/2} \\ &= [ (103.4)^2 + (203.0)^2 ]^{1/2} \\ &= 227.8 \text{ kg} * \text{mm} \end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μας δείχνει ότι το αντίβαρο θα έχει μάζα 2.85kg και θα βρίσκεται 80mm ακτινικά. Η γωνιακή του θέση υπολογίζεται από την εξίσωση 6.5:

$$\theta_c = \arctan \left( \frac{-203.0}{+103.4} \right) = 297.0^\circ$$

όπου η γωνία προσδιορίζεται από τα πρόσημα του αριθμητή και παρονομαστή της συνάρτησης του τόξου της εφαπτομένης και βρίσκεται στο τέταρτο τεταρτημόριο. Η γραφική λύση αυτού του παραδείγματος έχει παρουσιαστεί στο σχήμα 6.2.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

### Δυναμική ζυγοστάθμιση

Το σχήμα 7.1 δείχνει ένα ρότορα με έκκεντρες μάζες τοποθετημένες σε διάφορες αξονικές θέσεις. Σαν αποτέλεσμα ο ρότορας δέχεται και στατική και δυναμική ανισορροπία. Όπως είδαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο θα παρουσιαστεί μια περίπτωση με τρεις αρχικές μάζες, το οποίο παράδειγμα θα μπορέσει να γενικευτεί για οποιονδήποτε αριθμό μαζών. Η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  θεωρείται ότι είναι σταθερή.

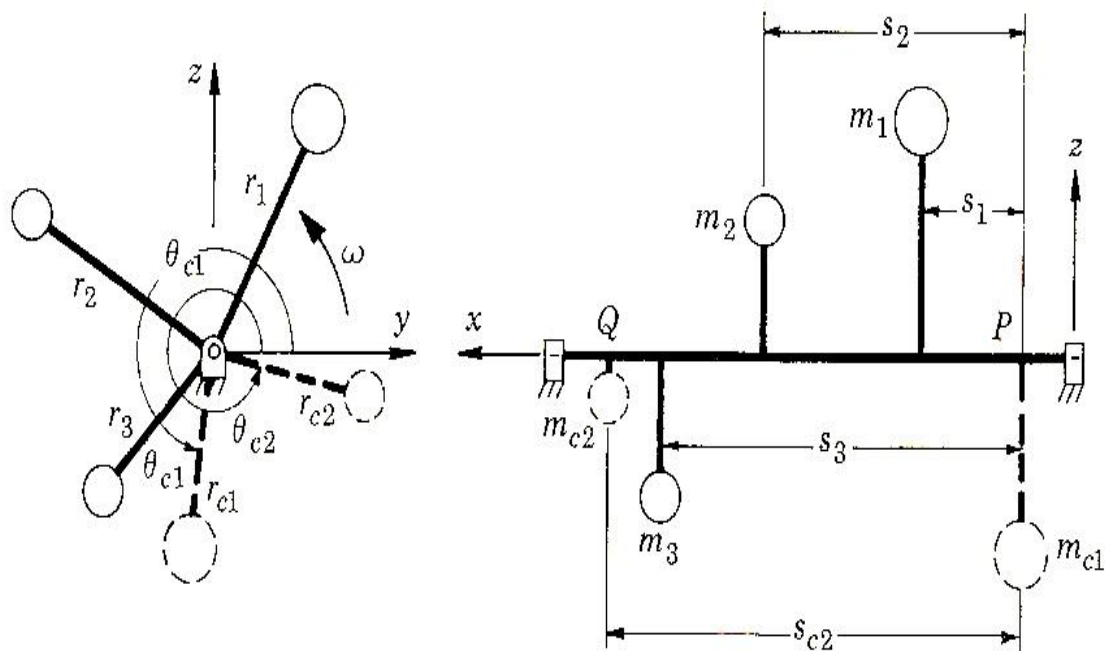
Θα εξετάσουμε την πιθανότητα της συνολικής ζυγοστάθμισης του ρότορα μέσω της τοποθέτησης δύο αντίβαρων μάζας  $m_{c1}$  και  $m_{c2}$  οι οποίες θα είναι τοποθετημένες σε εγκάρσια επίπεδα σε ακτινικές θέσεις P και Q επιλεγμένες αυθαίρετα. Για στατική ισορροπία το άθροισμα όλων των αδρανειακών δυνάμεων πρέπει να είναι μηδέν, αυτή η κατάσταση παρουσιάζεται μέσω των παρακάτω εξισώσεων οι οποίες είναι παρόμοιες με τις 6.2 και 6.3.

$$m_1 r_1 + m_2 r_2 + m_3 r_3 + m_{c2} r_{c2} = 0 \quad 7.1$$

και για γενικές περιπτώσεις που έχουν N μάζες,

$$\sum_{n=1}^N m_n r_n + m_{c1} r_{c1} + m_{c2} r_{c2} = 0 \quad 7.2$$

Ωστόσο, ένα ζεύγος δυνάμεων που προκαλεί δόνηση θα συνεχίσει να υπάρχει αν οι αδρανειακές δυνάμεις παράγουν ένα καθαρό ζεύγος. Επιπλέον, η προϋπόθεση για να έχουμε δυναμική ζυγοστάθμιση είναι το άθροισμα των ροπών των αδρανειακών δυνάμεων σε οποιοδήποτε σημείο να είναι μηδέν. Για λόγους ευκολίας για να καθορίσουμε τα απαιτούμενα αντίβαρα, θα πάρουμε τις ροπές στο σημείο P, την αξονική θέση του αντίβαρου 1, εξαλείφοντας αυτό το άγνωστο αντίβαρο από την εξίσωση των ροπών. Οι αξονικές αποστάσεις όλων των άλλων μαζών, που σχετίζονται με το σημείο P συμβολίζονται με  $s$  στο σχήμα 7.1.



Σχήμα 7.1: Γενικά, η δυναμική ζυγοστάθμιση απαιτεί τη χρήση δύο αντίβαρων. Στη συγκεκριμένη περίπτωση, τα αντίβαρα έχουν τοποθετηθεί σε τυχαία επίπεδα σε αξονικές θέσεις P και Q.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση που αναφέρεται στη ροπή μιας δύναμης, βρίσκουμε ότι το άθροισμα των ροπών των αδρανειακών δυνάμεων σε σχέση με το σημείο P είναι:

$$(s_1 i * m_1 \omega^2 r_1) + (s_2 i * m_2 \omega^2 r_2) + (s_3 i * m_3 \omega^2 r_3) + (s_{c2} i * m_{c2} \omega^2 r_{c2}) = 0$$

Βγάζοντας κοινό παράγοντα το  $i$  έχουμε:

$$i * (s_1 * m_1 \omega^2 r_1) + (s_2 * m_2 \omega^2 r_2) + (s_3 * m_3 \omega^2 r_3) + (s_{c2} * m_{c2} \omega^2 r_{c2}) = 0 \quad 7.3$$

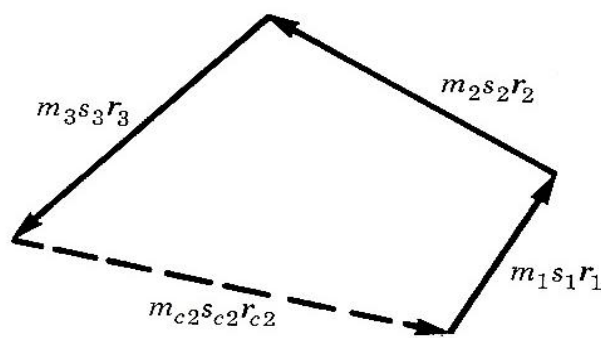
όπου τα διανύσματα  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_3$  και  $r_{c2}$  δεν έχουν το  $i$  σαν συνιστώσα. Ο μόνος τρόπος για να λυθεί η σχέση 7.1 είναι αν ο δεύτερος παράγοντας γινομένου είναι μηδέν. Αν βγάλουμε κοινό παράγοντα το  $\omega^2$ , θα έχουμε για δυναμική ζυγοστάθμιση:

$$(s_1 * m_1 r_1) + (s_2 * m_2 r_2) + (s_3 * m_3 r_3) + (s_{c2} * m_{c2} r_{c2}) = 0 \quad 7.4$$

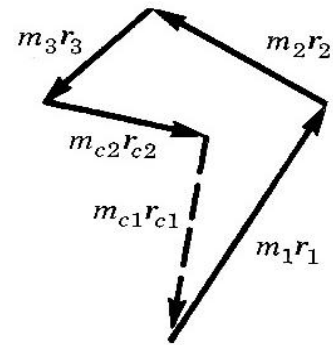
Η γενική μορφή της παραπάνω εξίσωσης είναι:

$$\sum_{n=1}^N m_n s_n r_n + m_{c2} s_{c2} r_{c2} = 0$$

7.5



Σχήμα 7.2: Γραφικός προσδιορισμός του αντίβαρου Νο.2



Σχήμα 7.3: Γραφικός προσδιορισμός του αντίβαρου Νο.1

Οι εξισώσεις 7.1 ή 7.2 και οι εξισώσεις 7.4 ή 7.5 πρέπει να ισχύουν για να έχουμε πλήρη ζυγοστάθμιση και πρέπει να λύνονται προσομοιωτικά για τα απαιτούμενα αντίβαρα. Αυτές είναι διανυσματικές εξισώσεις δύο αγνώστων, με άγνωστους τα διανύσματα  $m_{c1}r_{c1}$  και  $m_{c2}r_{c2}$ .

Η γραφική λύση φαίνεται στο σχήμα 7.2 και 7.3 για περίπτωση τριών αδρανειακών μαζών. Αρχικά λύνουμε την εξίσωση 7.4 (βλέπε σχήμα 7.2) σχεδιάζοντας υπό κλίμακα τα πρώτα τρία διανύσματα, τα οποία είναι γνωστά. Το διάνυσμα το οποίο κλείνει το πολύγωνο είναι το  $s_{c2} * m_{c2}r_{c2}$ . Η κατεύθυνση του διανύσματος προσδιορίζει τον απαιτούμενο γωνιακό προσανατολισμό του αντίβαρου στο εγκάρσιο επίπεδο στο σημείο Q και το μέγεθος του διανύσματος διαιρούμενο με την γνωστή απόσταση  $s_{c2}$  είναι η απαιτούμενη διόρθωση  $m_{c2}r_{c2}$ . Το αντίβαρο στο σημείο P μπορεί πλέον να καθοριστεί από την εξίσωση 7.1. εφόσον το διάνυσμα  $m_{c2}r_{c2}$  είναι γνωστό. Βλέποντας το σχήμα 7.3 το διάνυσμα που κλείνει το πολύγωνο είναι το  $m_{c1}r_{c1}$ , το οποίο μας δείχνει την κατεύθυνση και το μέγεθος του αντίβαρου. Η μαθηματική λύση συμπίπτει με τη γραφική προσέγγιση. Αρχικά η εξίσωση 7.4 διαιρείται στις παρακάτω εξισώσεις:

$$s_1 * m_1 r_1 * \cos\theta_1 + s_2 * m_2 r_2 * \cos\theta_2 + s_3 * m_3 r_3 * \cos\theta_3 + s_{c2} * m_{c2} r_{c2} * \cos\theta_{c2} = 0$$

$$s_1 * m_1 r_1 * \sin\theta_1 + s_2 * m_2 r_2 * \sin\theta_2 + s_3 * m_3 r_3 * \sin\theta_3 + s_{c2} * m_{c2} r_{c2} * \sin\theta_{c2} = 0$$

Λύνοντας ως προς  $m_{c2}r_{c2}$  και  $\theta_{c2}$  έχουμε:

$$m_{c2}r_{c2} = \frac{1}{s_{c2}} [(s_1 * m_1 r_1 * \cos\theta_1 + s_2 * m_2 r_2 * \cos\theta_2 + s_3 * m_3 r_3 * \cos\theta_3)^2 + (s_1 * m_1 r_1 * \sin\theta_1 + s_2 * m_2 r_2 * \sin\theta_2 + s_3 * m_3 r_3 * \sin\theta_3)^2]^{1/2} \quad 7.6$$



$$\theta_{c2} = \arctan \left( \frac{-s_1 * m_1 r_1 * \sin \theta_1 - s_2 * m_2 r_2 * \sin \theta_2 - s_3 * m_3 r_3 * \sin \theta_3}{-s_1 * m_1 r_1 * \cos \theta_1 - s_2 * m_2 r_2 * \cos \theta_2 - s_3 * m_3 r_3 * \cos \theta_3} \right) \quad 7.7$$

Έπειτα λύνουμε την εξίσωση 7.1 ως προς  $m_{c1} r_{c1}$  και  $\theta_{c1}$  με το ίδιο σκεπτικό που λύσαμε και τις  $m_{c2} r_{c2}$  και  $\theta_{c2}$ :

$$m_{c1} r_{c1} = [(m_1 r_1 \cos \theta_1 + m_2 r_2 \cos \theta_2 + m_3 r_3 \cos \theta_3 + m_{c2} r_{c2} \cos \theta_{c2})^2 + (m_1 r_1 \sin \theta_1 + m_2 r_2 \sin \theta_2 + m_3 r_3 \sin \theta_3 + m_{c2} r_{c2} \sin \theta_{c2})^2]^{1/2} \quad 7.8$$

$$\theta_{c1} = \arctan \left( \frac{-m_1 r_1 * \sin \theta_1 - m_2 r_2 * \sin \theta_2 - m_3 r_3 * \sin \theta_3}{-m_1 r_1 * \cos \theta_1 - m_2 r_2 * \cos \theta_2 - m_3 r_3 * \cos \theta_3} \right) \quad 7.9$$

Ο αριθμητής και ο παρονομαστής στο τόξο της εφαπτομένης των εξισώσεων 7.7 και 7.9 μας δείχνουν τα σωστά τεταρτημόρια των γωνιών  $\theta_{c1}$  και  $\theta_{c2}$ .

#### **Παράδειγμα 4:**

Ο ρότορας του σχήματος 7.1 έχει τις παρακάτω ιδιότητες:

$$m_1 = 3 \text{ kg} , \quad r_1 = 80 \text{ mm} , \quad \theta_1 = 60^\circ$$

$$m_2 = 2 \text{ kg} , \quad r_2 = 80 \text{ mm} , \quad \theta_2 = 150^\circ$$

$$m_3 = 2 \text{ kg} , \quad r_3 = 60 \text{ mm} , \quad \theta_3 = 225^\circ$$

Το συνολικό αξονικό του μήκος είναι 1000mm ανάμεσα στα έδρανα. Τα αντίβαρα τοποθετούνται σε επίπεδα που απέχουν 100mm από το κάθε έδρανο. Οι αξονικές αποστάσεις στο σχήμα 7.1 είναι πλέον :

$$s_1 = 200 \text{ mm} \quad s_2 = 500 \text{ mm} \quad s_3 = 700 \text{ mm} \quad s_{c2} = 800 \text{ mm}$$

Υπολογίζουμε τις κατάλληλες μάζες και θέσεις που πρέπει να έχουν τα αντίβαρα για να επέλθει συνολική ισορροπία.

Λύση:

Από την εξίσωση 7.6 έχουμε:

$$m_{c2} r_{c2} = \frac{1}{800} * [(104679)^2 + (22172)^2]^{1/2} = 133.8 \text{ kg} * \text{ mm}$$

Ένας συνδυασμός που θα μπορούσε να φέρει το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είναι  $m_{c2} = 2.23 \text{ kg}$  και  $r_{c2} = 60 \text{ mm}$ . Η γωνία υπολογίζεται από την εξίσωση 7.7:

$$\theta_{c2} = \arctan \left( \frac{-22172}{104679} \right) = 348.0^\circ$$

Τώρα τα  $m_{c1}r_{c1}$  και  $\theta_{c1}$  μπορούν να υπολογιστούν αντίστοιχα από τις εξισώσεις 7.8 και 7.9:

$$m_{c1}r_{c1} = [(27.4)^2 + (175.3)^2]^{1/2} = 177.4 \text{ kg} \cdot \text{mm}$$

(π.χ.: 2.96kg στα 60mm) και

$$\theta_{c1} = \arctan\left(\frac{-175.3}{-27.4}\right) = 261.1^\circ$$

Ο αρνητικός αριθμητής και παρονομαστής φανερώνει ότι η γωνία βρίσκεται στο τρίτο τεταρτημόριο. Η γραφική λύση του παραδείγματος φαίνεται σε κλίμακα στο σχήμα 7.2 και 7.3.

Με βάση την προηγούμενη «συζήτηση» προκύπτει το ερώτημα πως μπορεί ο ρότορας να έχει πλήρη ζυγοστάθμιση μέσω ενός μόνο αντίβαρου. Είδαμε νωρίτερα ότι ένα αντίβαρο αρκεί για την περίπτωση της στατικής ανισορροπίας. Γενικά ένας ρότορας δεν μπορεί να ζυγοσταθμιστεί με ένα αντίβαρο, επειδή υπάρχουν τέσσερις μεταβλητές (εξισώσεις 7.2 και 7.5) αλλά μόνο τρεις σχεδιασμένες παράμετροι. Αυτές είναι οι αξονικές θέσεις των αντίβαρων, ο γωνιακός προσανατολισμός  $\theta_c$  και η διόρθωση του μεγέθους  $m_{c1}r_{c1}$ . Μια ειδική περίπτωση όπου ένα αντίβαρο αρκεί είναι όταν όλες οι αδρανειακές μάζες βρίσκονται σε ένα επίπεδο που περιέχει και τον άξονα (π.χ. όλοι οι γωνιακοί προσανατολισμοί  $\theta$  είναι είτε ίσοι ή διαφέρουν κατά  $180^\circ$ ) και υπάρχει μια αδρανειακή στατική ανισορροπία. Σε αυτή την περίπτωση οι εξισώσεις 7.2 και 7.5 θα μειωθούν σε δύο γραμμικές εξισώσεις για το άγνωστο αντίβαρο.

Είδαμε ότι δύο αντίβαρα αντιπροσωπεύουν συνολικά έξι παραμέτρους στο σχήμα. Δύο τιμές από αυτές μπορούν να παρθούν αυθαίρετα. Αυτές στο σχήμα 7.1 είναι οι αξονικές θέσεις P και Q. Φυσικά μπορούμε να διαλέξουμε δυο άλλες παραμέτρους. Ωστόσο ένα πλεονέκτημα στο να διαλέξουμε τις αξονικές θέσεις είναι ότι τα αντίβαρα μπορούν να τοποθετηθούν δίπλα στα ρουλεμάν με σκοπό να ελαχιστοποιήσουμε τις ροπές κάμψης και την παραμόρφωση του άξονα. Αυτά οδηγούν σε μια δεύτερη παρατήρηση.

Είδαμε ότι οι εξισώσεις : 6.2, 6.3, 7.1, 7.2, 7.4 και 7.5 είναι ανεξάρτητες από τη γωνιακή ταχύτητα του άξονα  $\omega$ . Αυτό σημαίνει ότι ο ρότορας θα είναι ζυγοσταθμισμένος σε οποιαδήποτε ταχύτητα, ειδικότερα όσων αφορά την ακαμψία του ρότορα. Για μια σειρά γωνιακών ταχυτήτων η κάμψη του άξονα θα είναι αμελητέα (εξαρτάται βέβαια από το υλικό και το μέγεθος του ρότορα) και η ζυγοστάθμιση της ακαμψίας θα είναι ικανοποιητική. Ωστόσο, όσο η ταχύτητα αυξάνεται, τελικά η ευκαμψία του ρότορα θα γίνει σημαντική. Υπάρχει ένα ευρύ φάσμα τέτοιων εφαρμογών όπου οι τεχνικές ζυγοστάθμισης είναι ίδιες με αυτές που περιγράφονται πιο πάνω, αλλά οι οποίες ευθύνονται επίσης για ελαστική παραμόρφωση.

Από τη στιγμή που η κάμψη θα διαφέρει ανάλογα με την ταχύτητα, η διάταξη της ζυγοστάθμισης θα είναι ανάλογη της ταχύτητας και ως εκ τούτου πρέπει να σχεδιαστεί για συγκεκριμένη ταχύτητα λειτουργίας.

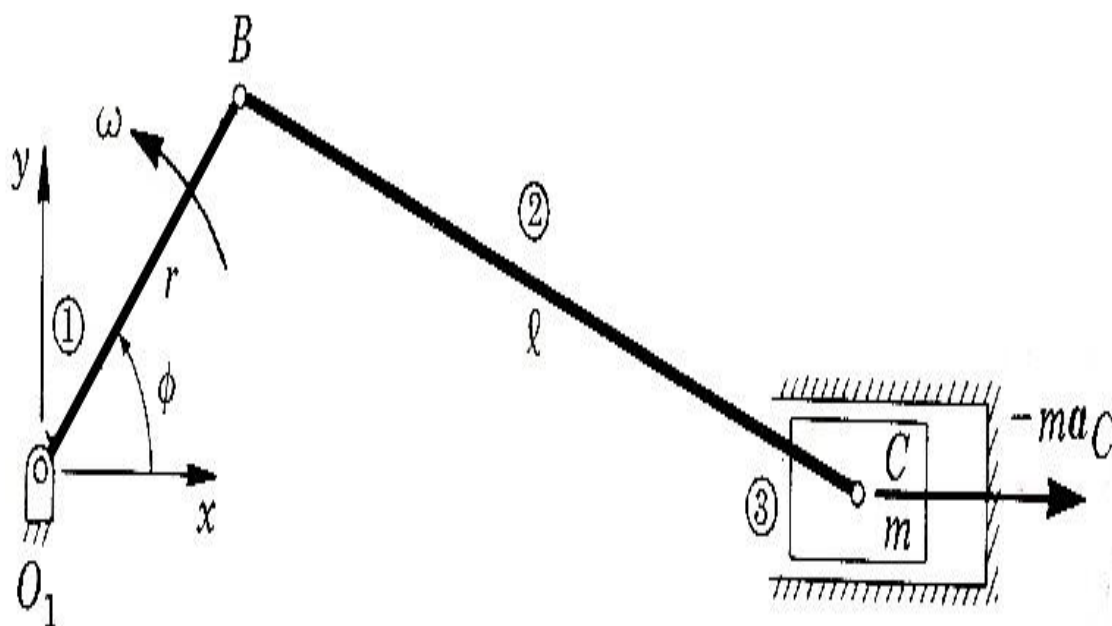
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

### Ζυγοστάθμιση παλινδρομικών μηχανών

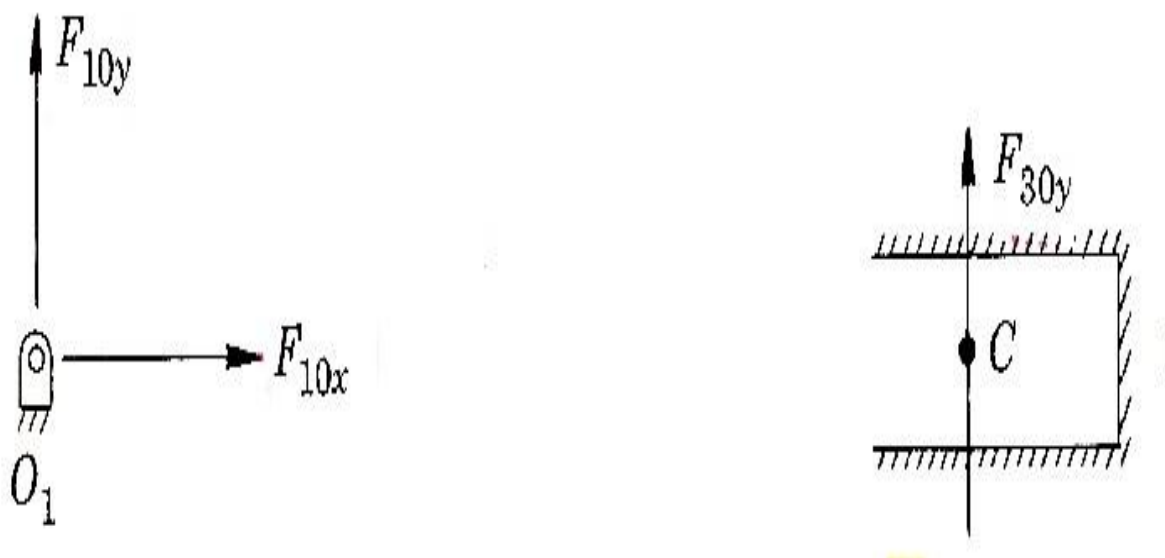
Ένας άλλος κοινός τύπος ανισορροπίας σε μηχανή είναι η παλινδρομική ανισορροπία, η οποία οφείλεται σε αδρανειακές δυνάμεις συνεργαζόμενες με κινούμενες μάζες. Τα αποτελέσματα είναι πολύ εμφανή σε μηχανές όπως πιστόνια μηχανών και συμπιεστές. Η ζυγοστάθμιση των παλινδρομικών μηχανών είναι πιο δύσκολη από τη ζυγοστάθμιση των ροτορών. Σε πολλές περιπτώσεις η πλήρης ζυγοστάθμιση δεν μπορεί να πραγματοποιηθεί με πρακτικά μέσα.

Το σχήμα 8.1 δείχνει έναν μηχανισμό διωστήρα με μήκος στροφάλου  $r$ , μήκος διωστήρα  $l$  και μάζα παλινδρόμησης  $m$ . Να σημειώσουμε ότι η μάζα  $m$  αποτελείται από ένα πιστόνι και ένα κομμάτι του διωστήρα. Θα υποθεθεί ότι το παρακάτω υλικό κινείται σταθερά μέσω του στρόφαλου, ο οποίος στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Επίσης θα υποθεθεί ότι η ανισορροπία λόγω στρέψης που εμφανίζεται στον μηχανισμό είναι ζυγοσταθμισμένη με ένα αντίβαρο τοποθετημένο πάνω στον στρόφαλο. Αυτό γίνεται συχνά και μειώνει τις αδρανειακές δυνάμεις που παράγονται από τον στρόφαλο και τα παλινδρομικά μέρη της μάζας του διωστήρα, έτσι ώστε να είναι αμελητέες.

Στο σχήμα 8.2 βλέπουμε το διάγραμμα ελευθέρου σώματος ενός πλαισίου με τις εξής ιδιότητες:  $m_B = 0$ ,  $m_c + m_3 = m$ , και  $\omega_1 = \omega$ .



Σχήμα 8.1: Μηχανισμός διωστήρα. Οι δυνάμεις αδράνειας μιας παλινδρομικής μάζας που παράγει μια δύναμη δόνησης και ένα ζεύγος δόνησης στο πλαίσιο της μηχανής.



Σχήμα 8.2: Γραφική παράσταση ελεύθερων σωμάτων σε πλαίσιο μηχανής.

$$F_{10x} = mr\omega^2 * \left[ \cos\varphi + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\varphi \right] \quad 8.1$$

$$F_{10y} = \frac{-mr^2\omega^2 \sin\varphi \left[ \cos\varphi + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\varphi \right]}{(l^2 - r^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \quad 8.2$$

$$F_{30y} = \frac{-mr^2\omega^2 \sin\varphi \left[ \cos\varphi + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\varphi \right]}{(l^2 - r^2 \sin^2\varphi)^{1/2}} \quad 8.3$$

Οι δυνάμεις που προκαλούν επιπτώσεις στην ισορροπία του συστήματος είναι η δύναμη ταλάντωσης  $F_{10x}$  και το ζεύγος ταλάντωσης αποτελείται από τις ίσες και αντίθετες δυνάμεις  $F_{10y}$  και  $F_{30y}$ . Η δύναμη ταλάντωσης παράγει μεταβαλλόμενη δόνηση στο πλαίσιο, ενώ τα αποτελέσματα του ζεύγους ταλάντωσης στην ταλάντωση στρέψης είναι παράλληλα στον στροφαλοφόρο άξονα.

Η μεγαλύτερη και πιθανότατα η πιο σημαντική των τριών δυνάμεων είναι η  $F_{10x}$ . Εμείς θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας στην ζυγοστάθμιση αυτής της δύναμης, της οποίας η εξίσωση, εφόσον αντικαταστήσουμε το  $\varphi = \omega t$ , ξαναγράφεται ως εξής:

$$F_s = mr\omega^2 * \cos\omega t + mr\omega^2 * \left(\frac{r}{l}\right) * \cos 2\omega t \quad 8.4$$

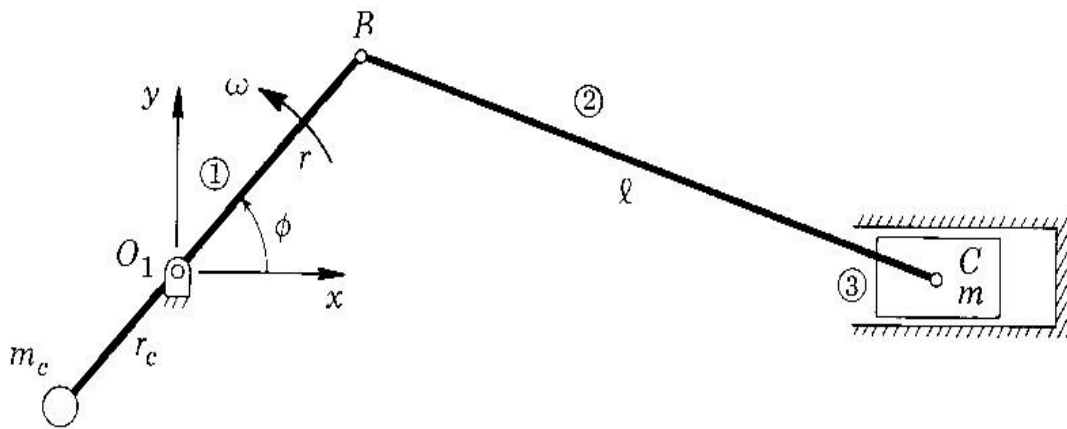
Αυτή η δύναμη έχει ποικίλα μεγέθη και κατευθύνσεις, αλλά η γραμμή δράσης της είναι κατά μήκος του κέντρου του κυλίνδρου (π.χ. γραμμή  $O_1C$  στο σχήμα 8.2) και η μεταβαλλόμενη δόνηση που προκαλείται θα βρίσκεται σε αυτή τη διεύθυνση.

Ο πρώτος όρος της εξίσωσης 8.4 που είναι και ο μεγαλύτερος από τους δύο όρους λέγεται αρχικό μέλος της δύναμης που προκαλεί δόνηση και έχει συχνότητα  $\omega$  ίση με την συχνότητα στρέψης του στρόφαλου. Ο δεύτερος όρος αναφέρεται ως δεύτερο μέλος της δύναμης που προκαλεί δόνηση και έχει συχνότητα  $2\omega$ , διπλάσια της συχνότητας του στρόφαλου. Στο επόμενο κεφάλαιο θα εξερευνήσουμε τρόπους εξουδετέρωσης της δύναμης που προκαλεί δόνηση.

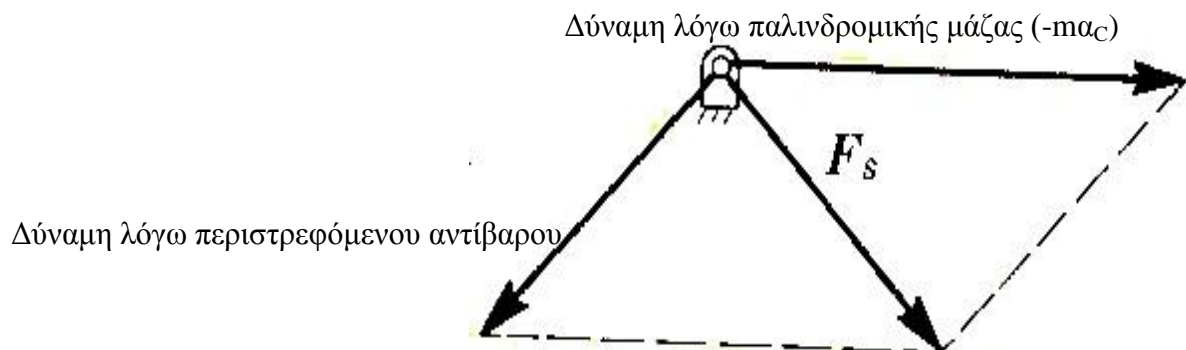
## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

### Μονοκύλινδρες μηχανές

Μια προσέγγιση που συνηθίζεται για μερική ζυγοστάθμιση μονοκύλινδρων μηχανών και συμπεστών είναι η προσθήκη ενός περιστρεφόμενου αντίβαρου στο στρόφαλο. Αυτό το αντίβαρο συμπληρώνει αυτό που περιγράψαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, το οποίο χρησιμοποιείται για να εξουδετερώσει την ανισορροπία λόγω στρέψης σύμφωνα με τη μάζα του στρόφαλου και το περιστρεφόμενο μέρος της μάζας του διωστήρα. Στο σχήμα 9.1 φαίνεται ο μηχανισμός του σχήματος 8.1 με ένα αντίβαρο μάζας  $m_c$  τοποθετημένο στο στρόφαλο σε ακτινική απόσταση  $r_c$  από το κύριο έδρανο  $O_1$  και γωνιακή θέση ίση με  $\phi+180^\circ$ .



Σχήμα 9.1: Μέρος της δύναμης ταλάντωσης του μηχανισμού διωστήρα ζυγοσταθμίζεται μέσω ενός περιστρεφόμενου αντίβαρου τοποθετημένο πάνω στο στρόφαλο



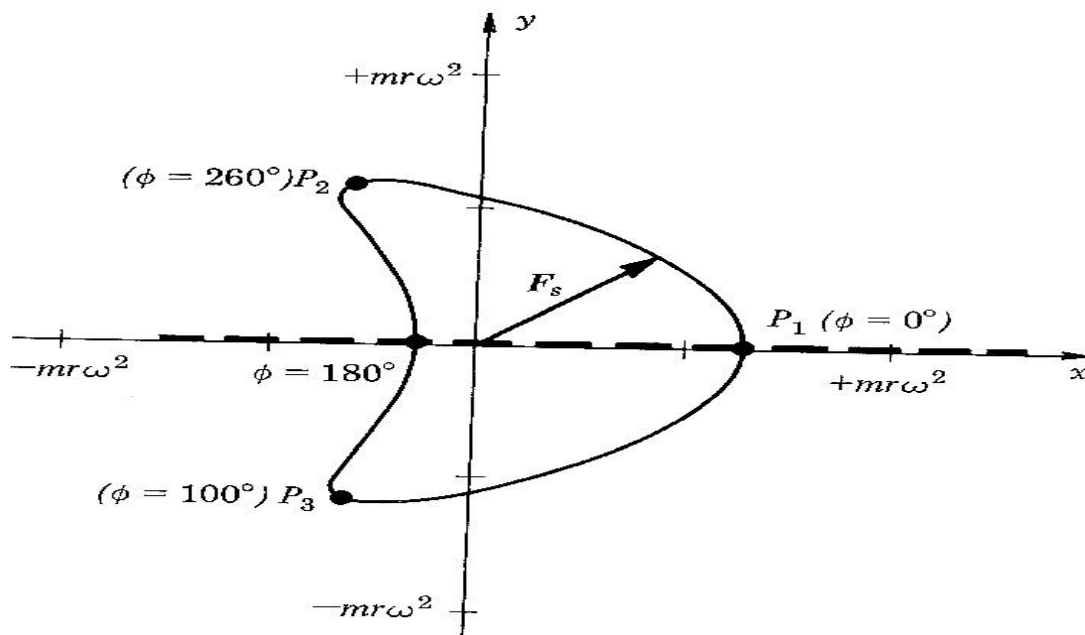
Σχήμα 9.2: Η καθαρή δύναμη ταλάντωσης  $F_s$

Αυτή η μάζα θα δημιουργήσει μία φυγόκεντρο, σταθερού μεγέθους δύναμη στο  $O_1$ , που περιστρέφεται με ταχύτητα  $\omega$ . Η συνολική δύναμη που προκαλεί δόνηση θα είναι τότε το άθροισμα των διανυσμάτων αυτής της δύναμης και της δύναμης στην εξίσωση 8.4 αναλυμένη σε άξονες  $x$  και  $y$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 9.2.

$$F_s = [mr\omega^2 * \cos\omega t + mr\omega^2 * \left(\frac{r}{l}\right) * \cos 2\omega t - m_c r_c \omega^2 * \cos\omega t] * i - m_c r_c \omega^2 * \sin\omega t \quad 9.1$$

Αυτό το αντίβαρο δεν μπορεί να εξουδετερώσει τελείως τη δύναμη που προκαλεί δόνηση διότι παρουσιάζει μια διάφορη του μηδενός συνιστώσα και την συνιστώσα  $x$ , παρόλο που την μειώνει δεν μπορεί να τη μηδενίσει. Ωστόσο με σωστό υπολογισμό της  $m_c r_c$ , το μέγιστο μέγεθος της δύναμης που προκαλεί δόνηση μπορεί να μειωθεί σημαντικά.

Το σύνηθες μέτρο της διόρθωσης του  $m_c r_c$  κυμαίνεται από  $m_c r_c = mr/2$  μέχρι  $m_c r_c = 2mr/3$ . Για παράδειγμα, έστω  $m_c r_c = 0,6mr$  για ένα μηχανισμό με σχέση μήκους στρόφαλου και διωστήρα να δίνεται από την αναλογία  $r/l = 0,25$ .



Σχήμα 9.3: Πολική γραφική παράσταση της δύναμης ταλάντωσης

Η παρακάτω είναι η έκφραση για τη δύναμη που προκαλεί ταλάντωση:

$$F_s = (0,4mr\omega^2 * \cos\phi + 0,25mr\omega^2 * \cos 2\phi) * i - 0,6mr\omega^2 * \sin\phi j$$



Το μέγεθος αυτής της δύναμης σε σχέση με τη γωνία  $\varphi$  του στρόφαλου είναι

$$|F_s| = m\omega^2 \sqrt{[(0,4\cos\varphi + 0,25\cos 2\varphi)^2 + (0,6\sin\varphi)^2]}$$

Στο σχήμα 9.3 φαίνεται η πολική γραφική παράσταση της δύναμης, όπου κάθε σημείο στην καμπύλη μας δείχνει το μέγεθος και την κατεύθυνση της δύναμης που προκαλεί δόνηση σε αντιστοιχία με τις τιμές της γωνίας  $\varphi$ . Το μέγιστο μέγεθος της δύναμης που προκαλεί δόνηση είναι  $|F_s| = 0,66m\omega^2$  και εμφανίζεται όταν η γωνία  $\varphi$  είναι ίση με  $100^\circ$  και  $260^\circ$ . Επιπρόσθετα, στο σχήμα 9.3 παρουσιάζεται η αδρανειακή δύναμη που προκαλεί δόνηση, η οποία μεταβάλλεται (διακεκομμένη γραμμή) χωρίς το αντίβαρο. Η μέγιστη δύναμη που προκαλεί δόνηση είναι  $|F_s|_{\max} = 1,25m\omega^2$  για  $\varphi = 0$ . Έτσι, έχουμε επιτύχει μια μείωση της τάξεως των 47% στο μέγεθος της δόνησης με την προσθήκη ενός περιστρεφόμενου αντίβαρου. Το κατάλληλο μέγεθος του αντίβαρου θα είναι αυτό που θα παράγει ίσες δυνάμεις δόνησης στα σημεία P1, P2 και P3 στην πολική γραφική παράσταση της δύναμης του σχήματος 9.3. Η εξέταση του σχήματος δείχνει ότι η διόρθωση που χρησιμοποιείται σε αυτό το παράδειγμα είναι κοντά στο βέλτιστο και επίσης μικρές βελτιώσεις πέραν του 47% μπορούν να πραγματοποιηθούν.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

### Πολυκύλινδρες μηχανές

Πολλές εφαρμογές με μηχανισμό διωστήρα όπως ΜΕΚ, αντλίες, και συμπιεστές περιλαμβάνουν πολλαπλούς μηχανισμούς, οι οποίοι συγχρονίζονται για να παρέχουν ομαλότερη ροή στο υγρό ή στη μετάδοση της ισχύος σε σχέση με ό,τι επιτυγχάνεται σε μια μονοκύλινδρη συσκευή. Αυτά τα πολυκύλινδρα συστήματα διευκολύνουν ένα από τα πιο αποτελεσματικά μέσα για τη μείωση των συνεπειών των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση. Με μια σωστή διεύθυνση των επιμέρους μηχανισμών, οι δυνάμεις που προκαλούν δόνηση θα μειωθούν ή υπάρχει περίπτωση και να εξαλειφθούν. Στις ακόλουθες παραγράφους, αρχικά θα αναπτύξουμε μια γενική ζυγοστάθμιση της δύναμης που προκαλεί δόνηση, σε σχέση με πολυκύλινδρες μηχανές και έπειτα θα εξετάσουμε κάποιες ειδικές διαμορφώσεις.

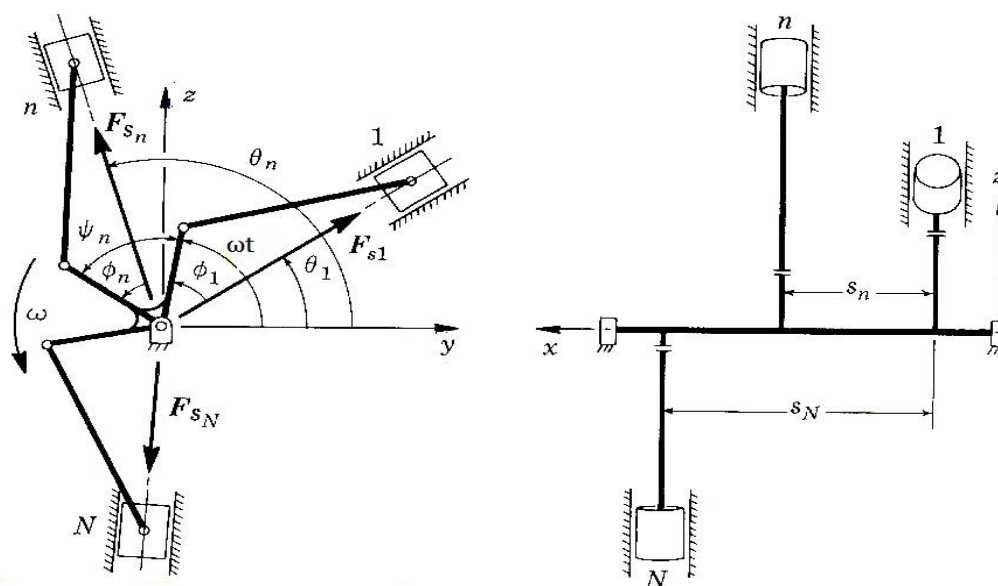
Κάθε μηχανισμός διωστήρα θα παράγει μια δύναμη που προκαλεί δόνηση με δράση κατά μήκος του κέντρου του κάθε κυλίνδρου (π.χ. σε γωνία  $\theta_n$  σε σχέση με τον άξονα  $y$ ). Από την εξίσωση 8.4 η έκφραση της κάθε δύναμης που προκαλεί δόνηση είναι:

$$F_{sn} = mr\omega^2 \cos\varphi_n + mr\omega^2 \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\varphi_n \quad n=1,2,\dots,N$$

Αντικαθιστώντας τη γωνία σε σχέση με το σχήμα 10.1 μπορούμε να ξαναγράψουμε την εξίσωση ως εξής:

$$F_{sn} = mr\omega^2 \cos(\omega t + \psi_n - \theta_n) + mr\omega^2 \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2(\omega t + \psi_n - \theta_n) \quad n=1,2,\dots,N$$

10.1



Σχήμα 10.1: Μια πολυκύλινδρη μηχανή.

Όπου  $\psi_1=0$ , από τον προηγούμενο ορισμό της γωνίας  $\psi_n$ . Το αποτέλεσμα της γωνίας που προκαλεί δόνηση θα είναι το άθροισμα των διανυσμάτων όλων των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση:

$$F_s = \sum_{n=1}^N (F_{sn} \cos \theta_n j + F_{sn} \sin \theta_n k) \quad 10.2$$

Προκειμένου να ρυθμίσουμε πλήρως τη δύναμη ζυγοστάθμισης οι  $y$  και  $z$  συνιστώσες της εξίσωσης 10.2 πρέπει να είναι ίσες με μηδέν, δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^N F_{sn} \cos \theta_n = 0 \quad \text{για όλα τα } t \quad 10.3$$

Και

$$\sum_{n=1}^N F_{sn} \sin \theta_n = 0 \quad \text{για όλα τα } t \quad 10.4$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση 10.1 βλέπουμε ότι προκύπτουν τα παρακάτω:

$$mr\omega^2 \sum_{n=1}^N \left[ \cos(\omega t + \psi_n - \theta_n) \cos \theta_n + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2(\omega t + \psi_n - \theta_n) \cos \theta_n \right] = 0$$

και

$$mr\omega^2 \sum_{n=1}^N \left[ \cos(\omega t + \psi_n - \theta_n) \sin \theta_n + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2(\omega t + \psi_n - \theta_n) \sin \theta_n \right] = 0$$

Καταργώντας το  $mr\omega^2$  το οποίο είναι διάφορο του 0, προκύπτει:

$$\begin{aligned} \cos \omega t \sum_{n=1}^N \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n - \sin \omega t \sum_{n=1}^N \sin(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n \\ + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\omega t \sum_{n=1}^N \cos(2\psi_n - 2\theta_n) \cos \theta_n \\ - \left(\frac{r}{l}\right) \sin 2\omega t \sum_{n=1}^N \sin(2\psi_n - 2\theta_n) \cos \theta_n = 0 \end{aligned}$$

10.5

Και

$$\begin{aligned} \cos\omega t \sum_{n=1}^N \cos(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n - \sin\omega t \sum_{n=1}^N \sin(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n \\ + \left(\frac{r}{l}\right) \cos 2\omega t \sum_{n=1}^N \cos(2\psi_n - 2\theta_n) \sin\theta_n \\ - \left(\frac{r}{l}\right) \sin 2\omega t \sum_{n=1}^N \sin(2\psi_n - 2\theta_n) \sin\theta_n = 0 \end{aligned}$$

10.6

Ο μόνος τρόπος, για να ισούνται αυτές οι εξισώσεις με μηδέν, είναι εφόσον οι συντελεστές των ημιτόνων και συνημιτόνων, που εξαρτώνται από το χρόνο, με βάση τη λειτουργία είναι όλοι μηδέν. Αυτό μας παραπέμπει στις παρακάτω έξι απαραίτητες συνθήκες για να έχουμε πλήρη ζυγοστάθμιση:

$$\sum_{n=1}^N \cos(\psi_n - \theta_n) \cos\theta_n = 0 \quad 10.7A$$

$$\sum_{n=1}^N \sin(\psi_n - \theta_n) \cos\theta_n = 0 \quad 10.7B$$

$$\sum_{n=1}^N \cos(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = 0 \quad 10.7C$$

$$\sum_{n=1}^N \sin(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = 0 \quad 10.7D$$

$$\sum_{n=1}^N \cos(2\psi_n - 2\theta_n) \cos\theta_n = 0 \quad 10.7E$$

$$\sum_{n=1}^N \sin(2\psi_n - 2\theta_n) \cos\theta_n = 0 \quad 10.7F$$

$$\sum_{n=1}^N \cos(2\psi_n - 2\theta_n) \sin\theta_n = 0 \quad 10.7G$$

$$\sum_{n=1}^N \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = 0 \quad 10.7H$$

Οι τέσσερις πρώτες συνθήκες αναφέρονται στο αρχικό μέλος των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση και αν όλες ικανοποιούνται, τότε οι αρχικές δυνάμεις που προκαλούν δόνηση είναι ζυγοσταθμισμένες.

Οι τελευταίες τέσσερις συνθήκες παρουσιάζουν το δευτερεύον μέλος και αν ικανοποιούνται, τότε οι δευτερεύουσες δυνάμεις που προκαλούν δόνηση είναι ζυγοσταθμισμένες.

Να σημειώσουμε ότι οι οχτώ συνθήκες συσχετίζονται με τον προσανατολισμό του κυλίνδρου  $\theta_n$  και με τη γωνία του στρόφαλου  $\psi_n$  και ακολουθεί ότι κάποιες ρυθμίσεις των συγκεκριμένων παραμέτρων μπορεί να παράγουν δύναμη ζυγοστάθμισης, ενώ άλλες ρυθμίσεις όχι. Περαιτέρω κάποιες ρυθμίσεις μπορεί να επηρεάζουν μόνο την αρχική δύναμη ζυγοστάθμισης ή μόνο τη δευτερεύουσα. Από αυτές τις δύο πιθανότητες προτιμάται η αρχική ζυγοστάθμιση, διότι αυτή θα ακυρώσει το μεγαλύτερο μέρος των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση.

Στις περισσότερες πολυκύλινδρες μηχανές, οι μηχανισμοί διωστήρα πρέπει να έχουν μια συγκεκριμένη απόσταση αξονικά κατά μήκος του στροφαλοφόρου άξονα, έτσι ώστε να αποφεύγονται παρεμβολές κατά τη διάρκεια της λειτουργίας. Αυτή η αξονική απόσταση παρουσιάζεται στο σχήμα 10.1 με τις αποστάσεις  $s_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Μετρώντας από τον κύλινδρο που σχεδιάστηκε σαν νούμερο 1 (δηλαδή  $s_1 = 0$ ). Από τη στιγμή που κάθε δύναμη που προκαλεί δόνηση δε θα βρίσκεται σε ένα επίπεδο, θα παράγουν μία ροπή που θα προκαλεί δόνηση, όπως και μια καθαρή δύναμη που προκαλεί δόνηση, οι οποίες θα τείνουν να προκαλέσουν μία δονητική στρέψη κατά μήκος του στροφαλοφόρου άξονα.

Μπορούμε να γράψουμε τις παρακάτω συνθήκες για τη ζυγοστάθμιση της ροπής που προκαλεί δόνηση θεωρώντας ότι το άθροισμα των ροπών που προκαλούν δόνηση πρέπει να είναι σε κάθε σημείο αξονικά μηδέν. Παίρνοντας τις ροπές σε σχέση με τις αξονικές θέσεις του κυλίνδρου 1 έχουμε τα εξής:

$$\sum_{n=1}^N s_n \mathbf{i} * (F_{sn} \cos\theta_n \mathbf{j} + F_{sn} \sin\theta_n \mathbf{k}) = 0 \quad 10.8$$

Προκειμένου να ικανοποιηθεί αυτή η εξίσωση οι επιμέρους  $j$  και  $k$  συνιστώσες του δευτερεύοντα παράγοντα του γινομένου πρέπει να είναι μηδέν. Δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^N s_n F_{sn} \cos\theta_n = 0 \quad \text{για όλα τα } t \quad 10.9$$

Και

$$\sum_{n=1}^N s_n F_{sn} \sin \theta_n = 0 \quad \text{για όλα τα } t \quad 10.10$$

Αυτές οι εξισώσεις είναι παρόμοιες με τις εξισώσεις 10.3 και 10.4 και οδηγούν στο παρακάτω παρόμοιο σετ συνθηκών για τη ζυγοστάθμιση των ροπών που προκαλούν δόνηση:

$$\sum_{n=1}^N s_n \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 \quad 10.11A$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \sin(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 \quad 10.11B$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \cos(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 \quad 10.11C$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \sin(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 \quad 10.11D$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \cos(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 \quad 10.11E$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \sin(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 \quad 10.11F$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \cos(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 \quad 10.11G$$

$$\sum_{n=1}^N s_n \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 \quad 10.11H$$

Οι τέσσερις πρώτες συνθήκες εγγυώνται τη ζυγοστάθμιση των αρχικών ροπών που προκαλούν δόνηση, ενώ οι τέσσερις τελευταίες τη ζυγοστάθμιση των δευτερευόντων ροπών που προκαλούν δόνηση. Αυτές οι εξισώσεις απαιτούνται για την αξονική

διαμόρφωση των κυλίνδρων όπως και για τον γωνιακό τους προσανατολισμό και τις γωνιακές αποστάσεις των τροφάλων. Οι εξισώσεις 10.7Α μέχρι και 10.7Η καθώς και 10.11Α μέχρι και 10.11Η μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εξετασθεί η ζυγοστάθμιση κάθε εμβόλου μηχανής ή συμπιεστή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

### Μηχανές σε σειρά

Στις συγκεκριμένες μηχανές όλοι οι κύλινδροι βρίσκονται σε ένα επίπεδο και στη μία πλευρά του άξονα του στρόφαλου. Ας υποθέσουμε ότι αυτές οι θέσεις δίνονται από τα  $\theta_1 = \theta_2 = \dots = \theta_n = \theta_N = \pi/2$ . Επιπρόσθετα θα υποθέσουμε ότι έχουν ίδια αξονική απόσταση μεταξύ τους  $s$ , έπειτα  $s_n = (n-1) * s$ , όπου οι κύλινδροι μετρούνται διαδοχικά από το ένα τέλος του στροφαλοφόρου άξονα στο άλλο. Αντικαθιστώντας αυτήν την πληροφορία βλέπουμε ότι οι εξισώσεις: 10.7Α μέχρι την 10.7Η και οι 10.11Α μέχρι 10.11Η μετατρέπονται στις παρακάτω συνθήκες:

$$\sum_{n=1}^N \sin\psi_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^N (n-1)\sin\psi_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^N \cos\psi_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^N (n-1)\cos\psi_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^N \cos 2\psi_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^N (n-1)\cos 2\psi_n = 0$$

$$\sum_{n=1}^N \sin 2\psi_n = 0 \qquad \sum_{n=1}^N (n-1)\sin 2\psi_n = 0$$

Στο σχήμα 11.1 φαίνεται ένας δγκύλινδρος σε σειρά και με διαφορά στροφάλων  $180^\circ$  άξονας, ο οποίος έχει τα εξής χαρακτηριστικά:

$$N = 2, \psi_1 = 0 \text{ και } \psi_2 = \pi$$

Αντικαθιστώντας στις παραπάνω σχέσεις έχουμε:

$$\sum_{n=1}^2 \sin\psi_n = \sin(0) + \sin\pi = 0$$

$$\sum_{n=1}^2 \cos\psi_n = \cos(0) + \cos\pi = 0$$

**πρωταρχική δύναμη**



$$\sum_{n=1}^2 \cos 2\psi_n = \cos(0) + \cos 2\pi = 2$$

$$\sum_{n=1}^2 \sin 2\psi_n = \sin(0) + \sin 2\pi = 0$$

**δευτερεύουσα δύναμη**

$$\sum_{n=1}^2 (n-1) \sin \psi_n = (0) \sin(0) + (1) \sin \pi = 0$$

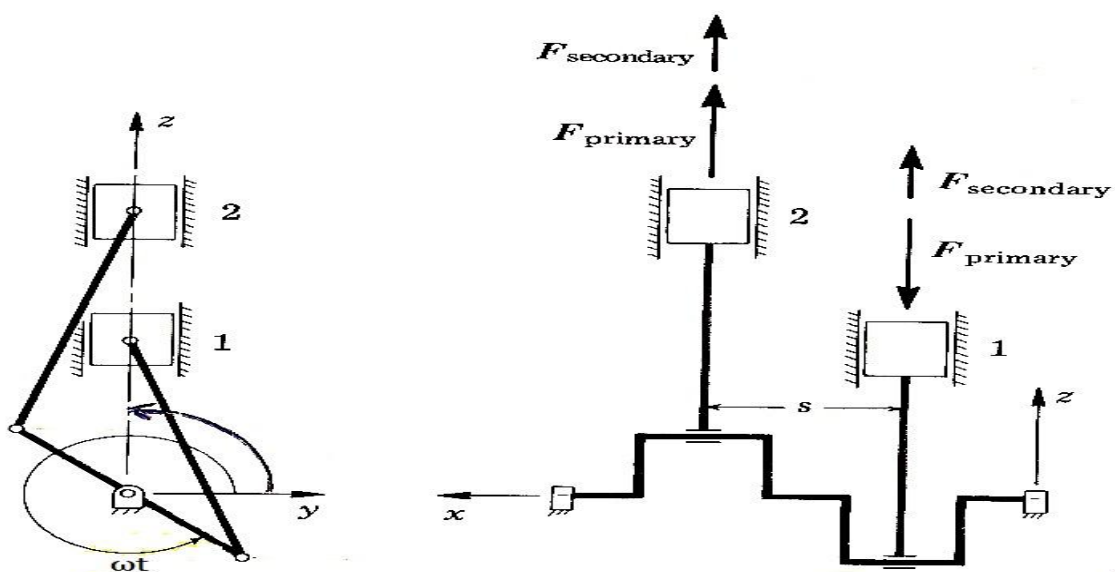
$$\sum_{n=1}^2 (n-1) \cos \psi_n = (0) \cos(0) + (1) \cos \pi = 0$$

**πρωταρχική ροπή**

$$\sum_{n=1}^2 (n-1) \cos 2\psi_n = (0) \cos(0) + (1) \cos 2\pi = 0$$

$$\sum_{n=1}^2 (n-1) \sin 2\psi_n = (0) \sin(0) + (1) \sin 2\pi = 0$$

**δευτερεύουσα ροπή**



Σχήμα 11.1: Μια δικύλινδρη σε σειρά μηχανή με διαφορά στροφάλων 180°

Τα πρωταρχικά μέρη των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση είναι πάντα ίσα και αντίθετα, δηλαδή εξουδετερώνονται εφόσον είναι αντίθετα αξονικά. Αυτό απεικονίζεται στο σχήμα 11.1. Από την άλλη τα δευτερεύοντα μέλη των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση είναι πάντα ίσα με ίδια κατεύθυνση με αποτέλεσμα ο συνδυασμός τους να παράγει μια καθαρή δύναμη η οποία προκαλεί μια καθαρή ροπή. Από την εξίσωση 10.2 η καθαρή δύναμη που προκαλεί δόνηση είναι:

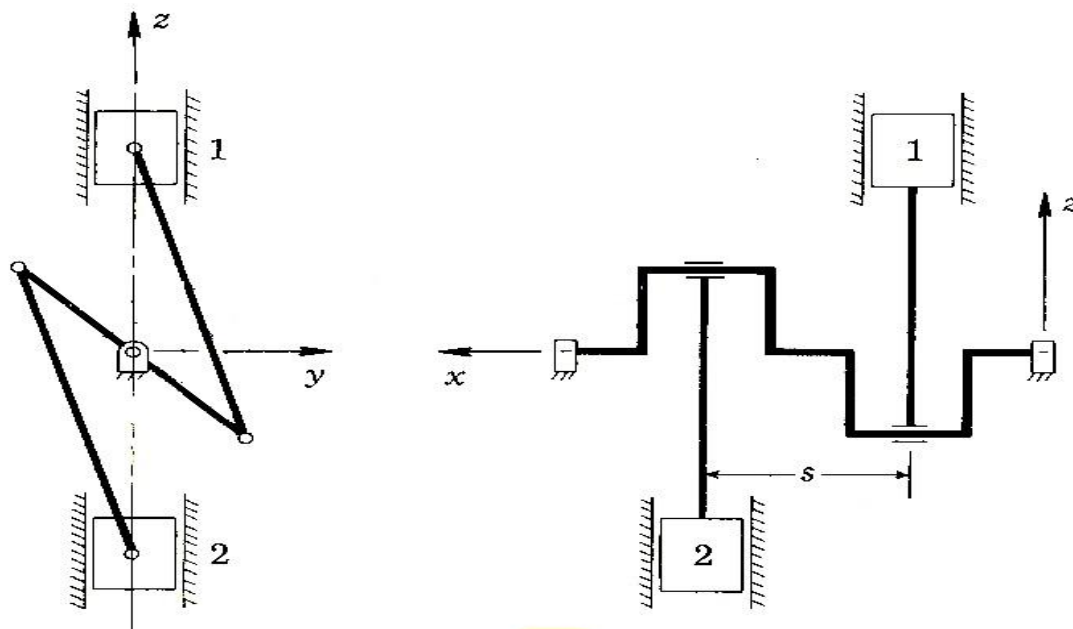
$$\begin{aligned}
 F_s &= \sum_{n=1}^2 F_{sn} k \\
 &= \left\{ m r \omega^2 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) + m r \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right) \cos \left[ 2 \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \right] + m r \omega^2 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) + \right. \\
 &\quad \left. m r \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right) \cos \left[ 2 \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} k \\
 &= -2 m r \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right) \cos 2 \omega t k
 \end{aligned}$$

με μέγιστο μέγεθος του  $2 m r \omega^2 \left( \frac{r}{l} \right)$ . Παρόλου που η δύναμη που προκαλεί δόνηση δεν είναι μηδέν, παρουσιάζει μια σημαντική βελτίωση στην δικύλινδρη μηχανή.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

### Μηχανές με αντίστροφους κυλίνδρους

Στην συγκεκριμένη μηχανή όλοι οι κύλινδροι βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο με διαφορά μεταξύ τους  $180^\circ$ , όπως φαίνεται στο σχήμα 12.1. Διαλέγοντας  $\theta_1 = \dots = \theta_{N/2} = \frac{\pi}{2}$  και  $\theta_{N/2+1} = \dots = \theta_N = \frac{3\pi}{2}$ , μισές από τις εξισώσεις 10.7A μέχρι 10.7H και 10.11A μέχρι 10.11H αυτόματα ικανοποιούνται. Αυτές είναι: 10.7A, 10.7B, 10.7E, 10.7F, 10.11A, 10.11B, 10.11E και 10.11F. Αυτά ισχύουν λόγω του γεγονότος ότι δε θα υπάρχουν δυνάμεις στη διεύθυνση y ή ροπές στη διεύθυνση z, στις γενικές εξισώσεις των δυνάμεων και των ροπών.



Σχήμα 12.1: Μια δικύλινδρη αντίστροφη μηχανή με διαφορά στροφάλων  $180^\circ$

Σαν παράδειγμα τέτοιας μηχανής αναπαριστάται στο σχήμα 12.1 όπου έχει τα εξής χαρακτηριστικά:  $N = 2$ ,  $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$ ,  $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ ,  $\psi_1 = 0$ ,  $\psi_2 = \pi$ ,  $s_1 = 0$  και  $s_2 = s$ .

Αντικαθιστώντας στις εξισώσεις 10.63C, 10.63D, 10.63G, 10.63H, 10.66C, 10.66D, 10.66G και 10.66H έχουμε:

$$\sum_{n=1}^2 \cos(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^2 \sin(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

**πρωταρχική δύναμη**

$$\sum_{n=1}^2 \cos(2\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = \cos(-\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^2 \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = \sin(-\pi) \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(-\pi) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

**δευτερεύουσα δύναμη**

$$\sum_{n=1}^2 s_n \cos(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = (0) + s \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^2 s_n \sin(\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = (0) + s \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = s$$

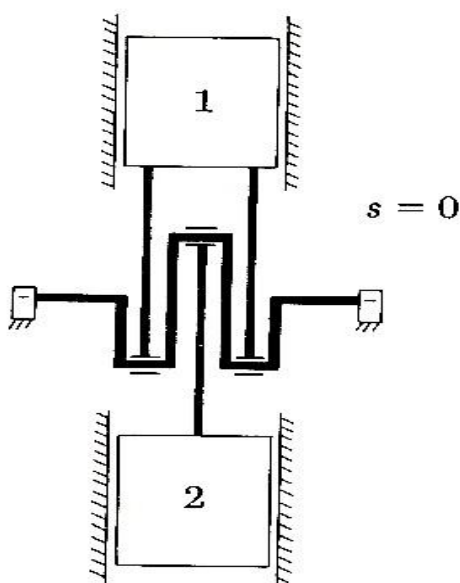
**πρωταρχική ροπή**

$$\sum_{n=1}^2 s_n \cos(2\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = (0) + s \cos(-\pi) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = s$$

$$\sum_{n=1}^2 s_n \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin\theta_n = (0) + s \sin(-\pi) \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$$

**δευτερεύουσα ροπή**

Η καθαρή δύναμη που προκαλεί δόνηση είναι μηδέν, επειδή και τα δύο μέλη των δυνάμεων, που προκαλούν δόνηση, εξουδετερώνονται.



Σχήμα 12.2: Διπλοί διωστήρες για κύλινδρο Νο.1

Αυτή είναι μια βελτίωση των δικύλινδρων σε σειρά μηχανών του σχήματος 11.1 αλλά θα υπάρξει ένα σημαντικό ζεύγος δόνησης λόγω του τρικλίσματος του στρόφαλου. Άρα όσο πιο μικρή είναι η απόσταση  $s$  τόσο καλύτερα θα είναι σχεδιασμένη η μηχανή από άποψη ζυγοστάθμισης. Μία μέθοδος ρύθμισης του  $s$  με σκοπό να μηδενισθεί το δονητικό ζεύγος είναι να χρησιμοποιήσουμε διπλό διωστήρα για κάθε κύλινδρο όπως φαίνεται στο σχήμα 12.2.

## ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

### Μηχανές V

Αυτού του είδους η μηχανή είναι μια συμπαγής μορφή πολύ κοινή στην αυτοκινητοβιομηχανία και σε άλλες εφαρμογές. Για παράδειγμα η V-8 μηχανή του σχήματος 13.1 αποτελείται από δύο σειρές τεσσάρων κυλίνδρων με γωνία  $90^\circ$  μεταξύ τους. Η γωνιακή απόσταση των τεσσάρων στροφάλων του στροφαλοφόρου άξονα είναι  $90^\circ$  αξονική απόσταση μεταξύ των στροφάλων  $s$ . Τα παρακάτω μεγέθη καθορίζονται από το σχήμα:

$$\theta_1 = \theta_3 = \theta_5 = \theta_7 = \frac{\pi}{2}$$

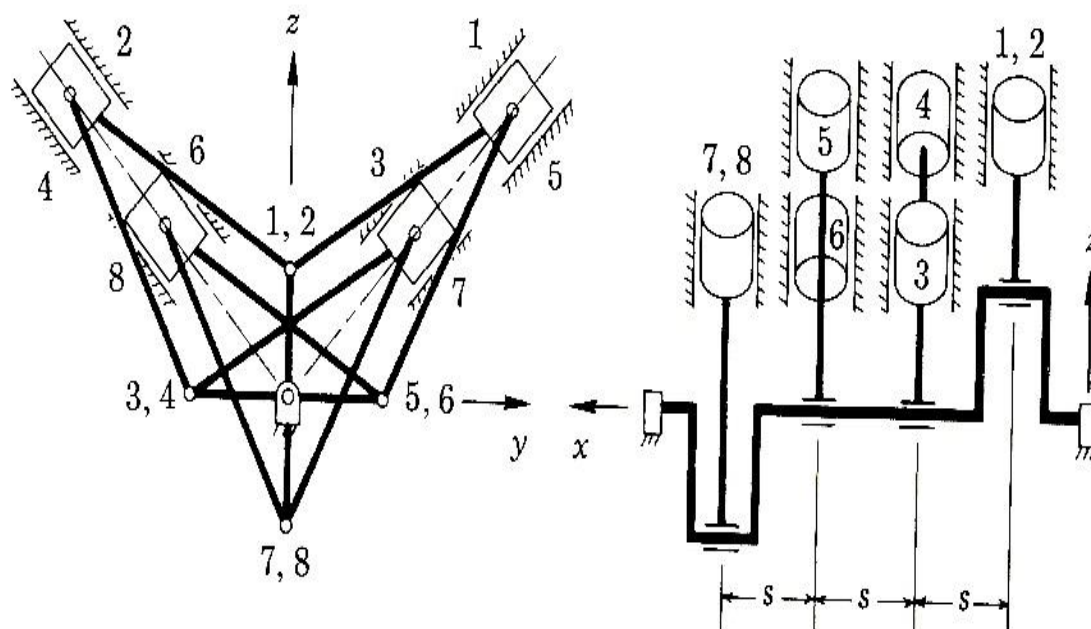
$$\theta_2 = \theta_4 = \theta_6 = \theta_8 = \frac{3\pi}{4}$$

$$\psi_1 = \psi_2 = 0, \psi_5 = \psi_6 = \frac{3\pi}{2}$$

$$\psi_3 = \psi_4 = \pi/2, \psi_7 = \psi_8 = \pi$$

$$s_1 = s_2 = 0, s_5 = s_6 = 2s$$

$$s_3 = s_4 = s, s_7 = s_8 = 3s$$



Σχήμα 13.1: Ένας V-8 κινητήρας με διαφορά στροφάλων  $90^\circ$

Οι συνθήκες για τη ζυγοστάθμιση καθορίζονται από τις εξισώσεις 10.7Α μέχρι 10.7Η:

$$\sum_{n=1}^8 \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = -\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = -\left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \cos(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \sin(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \cos(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

Πλέον η μηχανή από άποψη δυνάμεων είναι ζυγοσταθμισμένη. Αυτή η διαμόρφωση ισχύει για κάθε γωνία μεταξύ των σειρών των κυλίνδρων, δηλαδή κάθε σειρά τεσσάρων κυλίνδρων είναι δυναμικά ζυγοσταθμισμένη ανεξάρτητα.

Εξετάζοντας τις συνθήκες των ροπών που προκαλούν δόνηση οδηγούν στα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\sum_{n=1}^8 s_n \cos(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{2} - \frac{s}{2} - s + s - \frac{3s}{2} - \frac{3s}{2} = -3s$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \sin(\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{2} + \frac{s}{2} - s - s + \frac{3s}{2} - \frac{3s}{2} = -s$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \cos(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{2} + \frac{s}{2} - s - s - \frac{3s}{2} + \frac{3s}{2} = -s$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \sin(\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{2} - \frac{s}{2} - s + s + \frac{3s}{2} + \frac{3s}{2} = 3s$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \cos(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \sin(2\psi_n - \theta_n) \cos \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{2s}{\sqrt{2}} + \frac{2s}{\sqrt{2}} - \frac{3s}{\sqrt{2}} - \frac{3s}{\sqrt{2}} = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \cos(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\sum_{n=1}^8 s_n \sin(2\psi_n - \theta_n) \sin \theta_n = 0 + 0 + \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{2s}{\sqrt{2}} - \frac{2s}{\sqrt{2}} - \frac{3s}{\sqrt{2}} + \frac{3s}{\sqrt{2}} = 0$$

Υπάρχει ένα αρχικό δονητικό ζεύγος, αλλά όχι δευτερεύον δονητικό ζεύγος, άρα από μόνη της η ρύθμιση της μηχανής δεν επιφέρει πλήρη ζυγοστάθμιση των δυνάμεων και των ροπών. Ωστόσο το δονητικό ζεύγος διευκολύνει την πλήρη ζυγοστάθμιση με σχετικά μικρή τροποποίηση. Για να το καταλάβουμε αυτό, θεωρούμε την έκφραση της ροπής που προκαλεί δόνηση στην εξίσωση 10.8, όπου το  $M_s$  αναπαριστά τη ροπή που προκαλεί δόνηση:

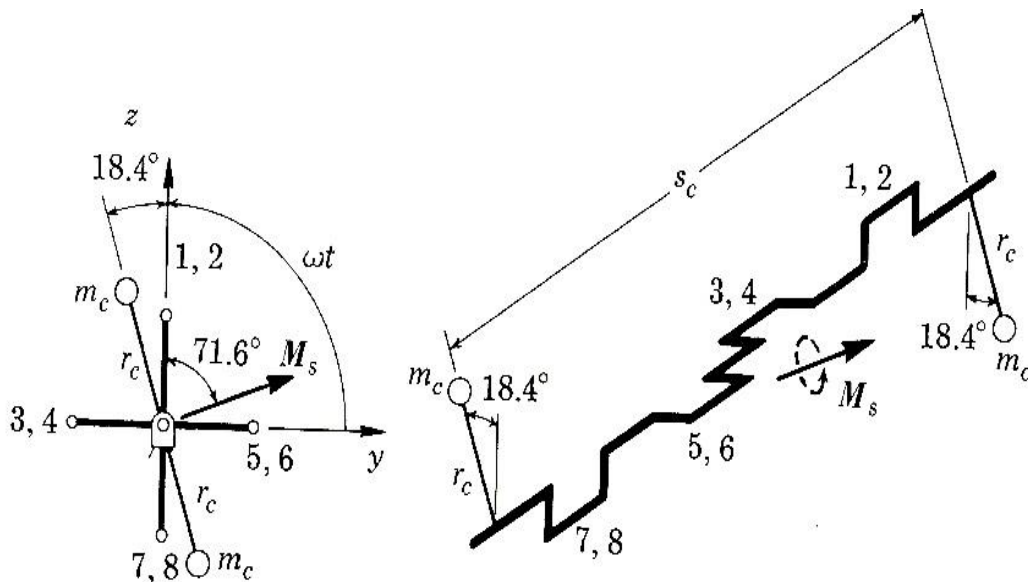


$$\begin{aligned}
 M_s &= \sum_{n=1}^8 s_n i * (F_{s_n} \cos \theta_n j + F_{s_n} \sin \theta_n k) = \sum_{n=1}^8 (-F_{s_n} s_n \sin \theta_n j + F_{s_n} s_n \cos \theta_n k) \\
 &= m r \omega^2 \sum_{n=1}^8 [-s_n \cos(\omega t + \psi_n - \theta_n) \sin \theta_n j \\
 &\quad + s_n \cos(\omega t + \psi_n - \theta_n) \cos \theta_n k]
 \end{aligned}$$

όπου τα δευτερεύοντα μέλη των δυνάμεων που προκαλούν δόνηση αποκλείονται εφόσον έχουν εξουδετερωθεί. Αναδιατάσσοντας αυτήν την έκφραση και αντικαθιστώντας τα αποτελέσματα που βρήκαμε προηγουμένως έχουμε:

$$\begin{aligned}
 M_s &= m r s \omega^2 [(3 \sin \omega t + \cos \omega t) j + (\sin \omega t - 3 \cos \omega t) k] \\
 &= m r s \omega^2 \sqrt{10} [\cos(\omega t - 71.6^\circ) j + \sin(\omega t - 71.6^\circ) k]
 \end{aligned}$$

Το μέγεθος αυτής της ροπής είναι  $m r s \omega^2 \sqrt{10}$ , το οποίο είναι σταθερό για όλες τις τιμές του χρόνου  $t$  και η κατεύθυνση της ροπής είναι κάθετη στον άξονα του στρόφαλου και περιστρέφεται με ταχύτητα  $\omega$ , όπου σε κάθε στιγμή το διάνυσμα της ροπής σε σχέση με τον άξονα  $y$  είναι  $(\omega t - 71.6^\circ)$ . Αυτό είναι ακριβώς το ίδιο με την περιστροφή ενός ανισόρροπου δυναμικού ζεύγους, το οποίο αναλύθηκε στο κεφάλαιο 5. Η καθαρή επίδραση αυτής της μηχανής είναι ότι εμφανίζεται να είναι μια δυναμική ανισορροπία στρέψης. Άρα το δονητικό ζεύγος μπορεί να ζυγοσταθμιστεί τοποθετώντας ένα σετ περιστρεφόμενων αντίβαρων, το οποίο θα παράγει ένα ίσο και αντίθετο περιστροφικό ζεύγος.



Σχήμα 13.2: Οι θέσεις των αντίβαρων.

Το μέγεθος αυτού του ζεύγους δίνεται από:  $m_c r_c s_c \omega^2 = m r s \omega^2 \sqrt{10}$  και οι θέσεις όπως απεικονίζονται στο σχήμα 13.2 όπου  $m_c$  είναι η μάζα,  $r_c$  είναι η ακτινική θέση και  $s_c$

Αναλυτική μέθοδος ζυγοστάθμισης μηχανών παλινδρομικής κίνησης

είναι η αξονική απόσταση των αντίβαρων. Επειδή αυτή η μηχανή μπορεί να ζυγοσταθμιστεί πλήρως με αυτόν τον τρόπο, παρουσιάζει ομαλή λειτουργία.

## ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Συνοψίζοντας, καταλήγουμε ότι η σπουδαιότητα της ζυγοστάθμισης σε κάθε τύπο μηχανής είναι μεγάλη. Η έλλειψή της επιφέρει αρκετά προβλήματα και βλάβες, που αφορούν την δομική ακεραιότητα της μηχανής καθώς και την αθόρυβη και συγχρονισμένη λειτουργία της.

Ανάλογα με την πολυπλοκότητα της μηχανής το έργο της ζυγοστάθμισης γίνεται ολοένα και πιο δύσκολο και απαιτεί μεγαλύτερη μελέτη. Για παράδειγμα, σε πολυκύλινδρες μηχανές, όπως είδαμε και στα παραδείγματα της εργασίας, η μαθηματική και γραφική ανάλυση των μελών της μηχανής και της μηχανής σαν ένα ενιαίο σώμα απαιτεί γνώση ανώτερων μαθηματικών, σε σχέση με τη μελέτη ενός και μόνο μηχανισμού διωστήρα.

Βέβαια, σε πρακτικό επίπεδο η πλειονότητα των μηχανών φέρει άνω του ενός κυλίνδρου. Γι' αυτό το λόγο η αντιμετώπιση των ταλαντώσεων γίνεται και μέσω της σχεδίασης, για παράδειγμα μηχανές τύπου V.

Όπως προαναφέραμε στην εργασία, η ταλάντωση των μηχανών δημιουργείται από διάφορες ανεπιθύμητες ροπές και δυνάμεις, οι οποίες δρουν σε συγκεκριμένες στιγμές. Ο συνηθέστερος τρόπος για να τις εξουδετερώσουμε είναι η προσθαφαίρεση μαζών με σκοπό τη δημιουργία αντίθετων δυνάμεων και ροπών από αυτές της ταλάντωσης στις συγκεκριμένες στιγμές δράσης αυτών.

Άρα, προκύπτει το συμπέρασμα ότι η σωστή ζυγοστάθμιση οποιασδήποτε μηχανής είναι μία από τις σημαντικότερες προϋποθέσεις για την μακροχρόνια και μέγιστη απόδοσή της.

## **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

1. “Kinematics and Dynamics of Machinery” by Charles E. Wilson, J. Peter Sadler, Walter J. Michels
2. “Kinematics and Dynamics of Machinery” (Second edition) by George H. Martin.
3. “Theory of Machines and Mechanisms” by Joseph Edward Shigley, John Joseph Uicker, Jr.