

Διδάσκοντες: Μ. Βασιλειάδου, Χ. Υάκινθος

Ονοματεπώνυμο:..... Αρ. Μητρώου..... Τμήμα

Εξέταση στα Μαθηματικά Β' Εξαμήνου

Θέμα 1^ο (2 μον):

Σε ένα εργοστάσιο υπάρχουν τρεις διαφορετικές γραμμές παραγωγής στις οποίες κατασκευάζεται το 50%, 30% και 20% των προϊόντων του εργοστασίου αντίστοιχα. Το 0,4% των προϊόντων της πρώτης γραμμής παραγωγής είναι ελαττωματικά. Τα αντίστοιχα ποσοστά για τις άλλες δύο γραμμές παραγωγής είναι 0,6% και 1,2%. Ποιο είναι το συνολικό ποσοστό ελαττωματικών προϊόντων που παράγονται από το εργοστάσιο;

Θέμα 2^ο (2.5 μον):

Να επαληθεύσετε ότι η συνάρτηση $y = c_1 e^{-x} \sin x + c_2 e^{-x} \eta \mu x$ είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης $y'' + 2y' + 2y = 0$. Στη συνέχεια, να βρείτε τη μερική λύση που αντιστοιχεί στις συνθήκες $y(0) = 0$ και $y'(\pi) = 0$.

Θέμα 3^ο (2.5 μον)

Για τη διαφορική εξίσωση $y' = 2x^2$ να βρείτε τη λύση εκείνη που ικανοποιεί τη συνθήκη $y(0) = 1$

Θέμα 4^ο (3 μον):

Να λύσετε τη διαφορική εξίσωση $y' + y - e^x y^2 = 0$

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

- Κανόνας σταθερής συνάρτησης: αν η $f(x) = a$ είναι σταθερή συνάρτηση και a είναι ένας πραγματικός αριθμός, τότε $f'(x) = (a)' = 0$.

- Κανόνας αθροίσματος:

$$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x), \text{ για κάθε συνάρτηση } f \text{ και } g \text{ και για κάθε πραγματικό αριθμό } a \text{ και } b.$$

Γο ίδιο ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

- Κανόνας γινομένου:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x), \text{ για κάθε συνάρτηση } f \text{ και } g.$$

Γο ίδιο ισχύει και για περισσότερες από δύο συναρτήσεις.

- Κανόνας πηλίκου:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \text{ για κάθε συνάρτηση } f \text{ και } g, \text{ όπου } g(x) \neq 0.$$

- Κανόνας αλυσίδας: εάν $f(x) = h(g(x))$

$$f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Τύπος εξίσωσης	Τρόπος επίλυσης
$y'(x) + p(x)y = f(x)$	$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + c \right]$
$y'(x) + p(x)y = f(x)y^m, m \neq 0,1$	$z = y^{1-m}$

Διδάσκοντες: Μ. Βασιλειάδου, Χ. Υάκινθος

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ		ΠΙΝΑΚΑΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	
Απλή συνάρτηση $f(x)$	Σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$	Απλή συνάρτηση $f(x)$	Σύνθετη συνάρτηση $f(g(x))$
$(x)' = 1, \quad (A)' = 0$ $A \in \mathbb{R}$	$[Af(x)]' = Af'(x)$	$\int dx = x + c$	$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$	$[f^\alpha(x)]' = \alpha [f(x)]^{\alpha-1} \cdot f'(x)$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$	$\int f^\alpha(x) f'(x) dx = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + c$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad x > 0$	$[\sqrt{f(x)}]' = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}} dx = 2\sqrt{f(x)} + c$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{1}{f^2(x)} \cdot f'(x)$	$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c$	$\int \frac{f'(x)}{f^2(x)} dx = -\frac{1}{f(x)} + c$
$(e^x)' = e^x$	$[e^{f(x)}]' = e^{f(x)} f'(x)$	$\int e^x dx = e^x + c$	$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
$(\alpha^x)' = \alpha^x \cdot \ln \alpha$ $0 < \alpha \neq 1$	$[\alpha^{f(x)}]' = \alpha^{f(x)} f'(x) \ln \alpha$	$\int \alpha^x dx = \frac{\alpha^x}{\ln \alpha} + c$	$\int \alpha^{f(x)} f'(x) dx = \frac{\alpha^{f(x)}}{\ln \alpha} + c$
$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad x > 0$	$[\ln f(x)]' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$	$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + c$	$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln f(x) + c$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$[\eta\mu f(x)]' = \sigma\upsilon\nu f(x) \cdot f'(x)$	$\int \sigma\upsilon\nu x dx = \eta\mu x + c$	$\int f'(x) \sigma\upsilon\nu f(x) dx = \eta\mu f(x) + c$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	$[\sigma\upsilon\nu f(x)]' = -\eta\mu f(x) \cdot f'(x)$	$\int \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int f'(x) \eta\mu x dx = -\sigma\upsilon\nu f(x) + c$
$(\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$	$[\varepsilon\varphi f(x)]' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} f'(x)$	$\int \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} dx = \varepsilon\varphi x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sigma\upsilon\nu^2 f(x)} dx = \varepsilon\varphi f(x) + c$
$(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$	$[\sigma\varphi f(x)]' = -\frac{1}{\eta\mu^2 f(x)} f'(x)$	$\int \frac{1}{\eta\mu^2 x} dx = -\sigma\varphi x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\eta\mu^2 f(x)} dx = -\sigma\varphi f(x) + c$
$(\tau\omicron\xi\eta\mu x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\tau\omicron\xi\eta\mu f(x)]' = \frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \tau\omicron\xi\eta\mu x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = \tau\omicron\xi\eta\mu f(x) + c$
$(\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$[\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu f(x)]' = -\frac{1}{\sqrt{1-f^2(x)}} f'(x)$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu x + c$	$\int \frac{f'(x)}{\sqrt{1-f^2(x)}} dx = -\tau\omicron\xi\sigma\upsilon\nu f(x) + c$
$(\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$[\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi f(x)]' = \frac{1}{1+f^2(x)} f'(x)$	$\int \frac{1}{x^2+1} dx = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi x + c$	$\int \frac{f'(x)}{1+f^2(x)} dx = \tau\omicron\xi\varepsilon\varphi f(x) + c$
		$\int \varepsilon\varphi x dx = -\ln \sigma\upsilon\nu x + c$ $\int \sigma\varphi x dx = \ln \eta\mu x + c$ $\int \frac{1}{x \ln \alpha} dx = \log_\alpha x + c \quad , \quad x \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$	
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+\alpha}} = \ln x+\sqrt{x^2+\alpha} + c$ $\int \frac{1}{x^2-\alpha^2} dx = \frac{1}{2\alpha} \ln \left \frac{x-\alpha}{x+\alpha} \right + c$ $\int \frac{1}{(\alpha^2+x^2)^{3/2}} dx = \frac{1}{\alpha} \eta\mu \left[\tau\omicron\xi\varepsilon\varphi \frac{x}{\alpha} \right] + c$ $\int \sqrt{\alpha^2-x^2} dx = \frac{x}{\alpha} \sqrt{\alpha^2-x^2} + \frac{\alpha^2}{2} \tau\omicron\xi\eta\mu \frac{x}{\alpha} + c$ $\int \sqrt{x^2+\alpha^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{2} \ln(x+\sqrt{x^2+\alpha^2}) + c$			