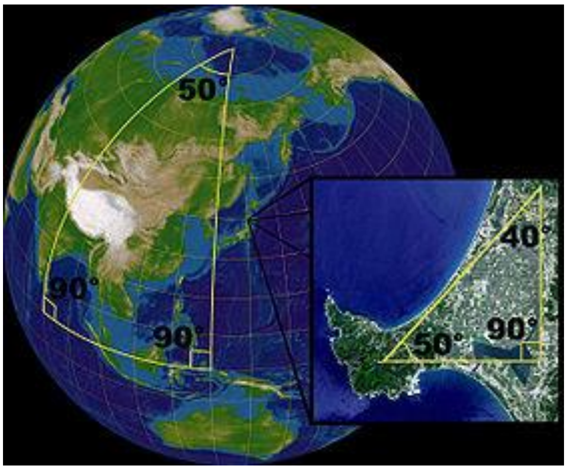
ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ
ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ
ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ



ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

<<Χρησιμότητα και Εφαρμογές της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία και στην Αστρονομία>>

Σπουδαστής: Παπάζογλου Αναστάσιος
Επιβλέπων Καθηγητής κ. Ματούλας Αθανάσιος

Νέα Μηχανιώνα 2015

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Εισαγωγή

Η Τριγωνομετρία είναι ο κλάδος των μαθηματικών, που έχει ως πρωταρχικό σκοπό την επίλυση τριγώνων είτε επίπεδων, είτε σφαιρικών, δηλαδή τον υπολογισμό των αγνώστων πλευρών και γωνιών του τριγώνου με επαρκή δεδομένα και με μεθόδους καθαρά λογιστικές. Κατά τους υπολογισμούς αυτούς χρησιμοποιούνται ειδικά «τριγωνομετρικά μεγέθη» που σήμερα λέγονται «τριγωνομετρικές συναρτήσεις». Η μέτρηση των γωνιών, με τα τόξα που καλύπτουν σε ένα κύκλο, είναι τόσο αρχαία, όσο και η ίδια η έννοια της γωνίας, και ήδη χρησιμοποιούνταν από τους Βαβυλωνίους, στους οποίους οφείλεται και η μονάδα μέτρησης της γωνίας, ο βαθμός. Βέβαια οι Βαβυλώνιοι, που χρησιμοποιούσαν τις γωνίες για επιστημονικούς και αστρολογικούς σκοπούς ,θέση και τροχιές ουρανίων αντικειμένων, μετρούσαν γωνίες μόνο μεταξύ 0ο και 360ο.Οι Έλληνες αστρονόμοι γενικά, στο θέμα της μέτρησης γωνιών, συμφωνούσαν με τους Βαβυλώνιους, ενώ οι Έλληνες γεωμέτρες της κλασσικής εποχής όριζαν τη γωνία κατά τρόπο πλέον αυστηρό και ακόμη πιο περιοριστικό. Γι’ αυτούς οι γωνίες είναι πάντοτε μικρότερες των δύο ορθών.

Η ιστορία της Τριγωνομετρίας αρχίζει με τις πρώτες μαθηματικές καταγραφές στην Αίγυπτο και στη Βαβυλώνα. Οι Βαβυλώνιοι καθιέρωσαν τη μέτρηση των γωνιών σε μοίρες σε πρώτα λεπτά και σε δεύτερα. Οι Βαβυλώνιοι αστρονόμοι είχαν συγκεντρώσει έναν τεράστιο αριθμό δεδομένων από παρατηρήσεις και είναι σήμερα γνωστό ότι ένα μεγάλο μέρος πέρασε στους Έλληνες. Αυτά τα πρώτα βήματα στην Αστρονομία οδήγησαν και στη γέννηση της Τριγωνομετρίας.

<u>Κεφάλαιο 1^{ο}</u>

Ιστορική εξέλιξη

Η σύγχρονη ναυτιλία, ιδίως με το τέλος του δεύτερου παγκοσμίου πολέμου έχει αποκτήσει άλλη μορφή καθώς νέα δεδομένα συνθέτουν πλέον τη μορφή της. Η εξέλιξη της τεχνολογίας συμμετέχει στην βελτίωση, στη διαρκή αναβάθμιση πολλές φορές και τελειοποίηση των οργάνων και εργαλείων γέφυρας ενώ η ηλεκτρονική προσφέρει αυτοματοποίηση, σημαντικότατες διευκολύνσεις, εξοικονόμηση χρόνου ακολουθώντας τις απαιτήσεις των καιρών μας. Ο αξιωματικός γέφυρας διαθέτει πλέον τα σύγχρονα μέσα που αποτελούν αναπόσπαστο μέρος της επαγγελματικής του κατάρτισης.
Παρά όλες τις εφαρμογές της επιστήμης ο ναυτίλος οφείλει να κατέχει τις μεθόδους της παραδοσιακής ναυτιλίας τόσο για προσωπική όσο και για επαγγελματική ολοκλήρωση. Πριν γίνει η ανάλυση των μεθόδων αυτών ενδιαφέρον παρουσιάζει να ανατρέξουμε στο παρελθόν και να μελετήσουμε τις προσπάθειες που έκανε το ανθρώπινο γένος να εξοικειωθεί και να δαμάσει το υγρό στοιχείο προς όφελός του.
Η πρώτη φάση των ναυτιλιακών δραστηριοτήτων χωρίς αμφιβολία υπήρξε η ακτοπλοΐα. Για την Ελλάδα η πλέον επίσημη αρχή της ναυτιλίας πρέπει να είναι ο τρωικός πόλεμος. Είναι η πρώτη οργανωμένη ναυτιλιακή εξόρμηση, στην οποία η παραγωγή και ο εξοπλισμός ναυμάχων πλοίων πραγματοποιήθηκε από την Ιθάκη μέχρι την Κάσο για την επιτυχία του σκοπού.
Από την εποχή της Τροίας και του Οδυσσέα μέχρι την εποχή της αναγεννήσεως ο ναυτίλος ταξίδευε με πρωτόγονα και ατελή μέσα. Όλη αυτή η εκτεταμένη σειρά ετών, γενεών και αιώνων η ναυτιλία φέρεται εις πέρας με βάση τα στοιχειώδη και τα υποτυπώδη μέσα. Ο ναυτίλος της τότε εποχής δεν ασχολείται καθόλου με τη θεωρία ούτε με την εξέταση των μέσων τα οποία χειρίζεται με επιδεξιότητα.
Πρόκειται για την εποχή των πρακτικών γνώσεων και των πολύ απλών δεδομένων. Τα ταξίδια είναι σύντομα και καλύπτουν μικρές μόνο αποστάσεις. Η πλεύση κατορθώνεται μέσω της διαδοχικής παράλλαξης ορισμένων φυσικών σημείων τα οποία βρίσκονται στη ξηρά. Μέσω της παράλλαξης ακρωτηρίων, νήσων, ενίοτε δε, και σκοπέλων. Τα διάφορα αυτά σημεία είναι πάντοτε εν όψει. Η δε πλεύση είναι αποτέλεσμα πρακτικής πείρας και εξοικείωσης.
Θα περάσουν πολλοί αιώνες μέχρι τη πρώτη αναγκαστική συσχέτιση θεωρίας και πράξης. Πολλοί λόγοι συντελούν στη καθυστερημένη εξέλιξη της ναυσιπλοΐας. Αυτό οφείλεται κυρίως στο γεγονός ότι η τότε ναυτιλιακή δραστηριότητα παρουσιάζεται σε τόπους όπου δεν χρειάζονται απαιτητικές γνώσεις για την εκτέλεση ενός ταξιδιού.
Ταυτόχρονα οι τόποι αυτοί παρουσιάζουν το ιδιαίτερο χαρακτηριστικό της μορφολογίας των ακτών τους κατά την οποία η γενική πορεία ή κατεύθυνση των πλωτών μέσων γίνεται από βορρά προς νότο και τανάπαλι. Είναι μια συμπτωματική κατάσταση εκ της οποίας πρόκειται για πολλούς αιώνες να ισχύσει και να κατοχυρωθεί η εποχή του πλάτους.
Η εξήγηση είναι εύκολη. Οι κάτοικοι της Πολυνησίας πρέπει να πλεύσουν προς βορρά για κάποιους μήνες του έτους για να διαβιώσουν υπό ευνοϊκότερες συνθήκες κλίματος και καιρικών δοκιμασιών. Οι κάτοικοι των Ινδιών πλέουν από βορρά προς νότο και τανάπαλι. Στη Μεσόγειο η ισπανική, η ιταλική, η ελληνική χερσόνησος, οι ακτές της Σαρδηνίας και Κορσικής, οι ακτές της Μικράς Ασίας κατευθύνονται από βορρά προς νότο.

Εκεί σημειώνεται όλη η εμπορική δραστηριότητα από την απαρχή της ναυτιλίας μέχρι τον Κολόμβο. Λογική συνέπεια, η πρώτη μαθηματική εξάρτηση του οργανωμένου πλου είναι ο υπολογισμός μιας των γεωγραφικών συντεταγμένων.

Προς διευκόλυνση του υπολογισμού του γεωγραφικού πλάτους παρουσιάζονται τα διάφορα ατελή γωνιόμετρα τα οποία ο ναυτίλος της τότε εποχής χρησιμοποιεί εξ ανάγκης. Όλα αυτά επινοήθηκαν με μοναδικό σκοπό τη μέτρηση του ύψους του ηλίου κατά τη μεσημβρινή διάβαση.

Υπό τις συνθήκες αυτές παρόλο που δύσκολα ο κλασικός υπολογισμός του μεσημβρινού πλάτους μπορεί να θεωρηθεί μια θεωρητική αγωγή αστρονομικής παρατήρησης η πραγματικότητα είναι ότι αυτή είναι η ιστορική συνδεσμολογία μεταξύ του πρακτικού ναυτίλου και της θεωρητικής ναυτιλίας.

Ο ναυτίλος καλείται να εξοικειωθεί στη μέτρηση γωνιών και στη προσθαφαίρεση δεδομένων για να υπολογίσει τη τιμή του πλάτους. Καλείται να παρατηρεί ύψη αστέρων. Να αναγνωρίζει την ειδική περίπτωση προσθαφαιρέσεως γωνιακών διαφορών και δεδομένων. Να επιφέρει διορθώσεις στο παρατηρηθέν ύψος, για να αντισταθμίσει τα σφάλματα, τα οποία προκαλούν τα γωνιόμετρα, η ημιδιάμετρος των πλανητών, η παράλλαξη, η ατμοσφαιρική διάθλαση, και το ύψος οφθαλμού. Για πρώτη φορά ο ναυτίλος σχετίζεται με γεωμετρικές παραστάσεις και εξηγήσεις. Αντιλαμβάνεται την ύπαρξη του νοητού κώνου τον οποίο με βάση τον ορατό ορίζοντα προκαλεί το ύψος οφθαλμού. Το σπουδαιότερο όλων αυτών είναι ότι για πρώτη φορά ο ναυτίλος της τότε εποχής χειρίζεται θέματα και προβλήματα που περιέχουν την τρίτη διάσταση.

Την εποχή αυτή η έννοια σφαιρικό τρίγωνο θέσης είναι ανύπαρκτη στο λεξιλόγιο του ναυτίλου. Κατά τη μεσημβρινή διάβαση η ωρική γωνία ισούται με μηδέν και εκ τούτου το σφαιρικό τρίγωνο δεν απασχολεί ούτε είναι δυνατό να απασχολήσει τον ναυτίλο.

Όμως το σφαιρικό τρίγωνο θέσης είναι γνωστό και υπερβολικά δοκιμασμένο. Το έχουν επανειλημμένα αναλύσει και λεπτομερώς εξετάσει οι αστρονόμοι και μαθηματικοί της εποχής. Παραμένει όμως στο στενό κύκλο της ακαδημαϊκής κοινότητας. Και θα παραμείνει εγκλωβισμένο μέχρις ότου μετά τον Κολόμβο προκύψει η ανάγκη δημιουργίας σχέσεως ναυτίλου, επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρίας.

Προς το παρόν ο ναυτίλος ασχολείται με απλές γωνίες που σήμερα ονομάζουμε γεωκεντρικές. Σχηματίζονται με τη κορυφή στο κέντρο της γης και με τις βάσεις επί της επιφανείας, ενώ ανήκουν σε ορισμένο μεσημβρινό επίπεδο. Άλλοτε η μια εκ των γωνιών αποτελεί συνέχεια της άλλης όταν έχουν μια πλευρά κοινή. Άλλοτε η μια υπερκαλύπτει την άλλη. Όλα αυτά γεννούν την ανάγκη κάποιων βασικών γνώσεων για να μπορεί ο ναυτίλος να γνωρίζει πότε οι τιμές αυτές προστίθενται κι πότε αφαιρούνται. Αν και σήμερα παρουσιάζεται ασήμαντη θεωρητική κατάρτιση αυτή είναι η αρχική μόρφωση του ναυτίλου για τα εμβαθή και πολυποίκιλα θέματα της θεωρίας.

Ήδη αναμετρήσαμε τα έτη από την εποχή της Τροίας μέχρι τη πτώση του Βυζαντίου και φθάνουμε στην εποχή του Χριστόφορου Κολόμβου και της ανακαλύψεως της Αμερικανικής Ηπείρου. Η ανακάλυψη της Αμερικής, τα κατακτητικά και εμπορικά ταξίδια που ακολούθησαν, η κατοίκηση των νέων ηπείρων και των νήσων της Καραϊβικής, η συστηματοποίηση του εμπορίου μεταξύ Ευρώπης και Αμερικής και οι αναπότρεπτες συγκοινωνίες απαιτούν συντομία, οργάνωση και βασιμότητα ναυσιπλοΐας.

Τα ταξίδια τώρα εκτελούνται με γενικές πορείες από δυσμάς προς ανατολάς και τανάπαλι. Οι αποστάσεις μεταξύ του τόπου προέλευσης και του προορισμού αρχίζουν να μετρώνται σε χιλιάδες μίλια. Όλα αυτά συναινούν στο να δημιουργηθεί μια συγκροτημένη και μελετημένη μέθοδος, δυνατή να εξασφαλίσει αίσια πέρατα των ταξιδιών.

Ο Κολόμβος, μια αμφιλεγόμενη προσωπικότητα, καθώς αρκετοί είναι αυτοί που τον θεωρούν αδέξιο ναυτίλο, υπήρξε οξυδερκής παρατηρητής πολλών και ενδιαφερόντων φαινόμενων.

Ανακάλυψε μια νέα ήπειρο, άσχετα αν έκανε λάθος εκτίμηση. Παρατήρησε την παρεκτροπή της πυξίδας. Όλοι οι ναυτίλοι πριν τον μεγάλο θαλασσοπόρο μεταχειρίσθηκαν την μαγνητική πυξίδα με όλη τη καλή πίστη και πεποίθηση της τότε γνώσεως των πραγμάτων και της τότε νοοτροπίας χωρίς να γνωρίζουν να γνωρίζουν ότι όντως υπάρχει το φαινόμενο των παρεκτροπών και η ανάγκη των σχετικών αντισταθμίσεων.

Ως γνωστό, στη περιοχή της μεσογείου, της Μαύρης θάλασσας και της Ανατολής η τιμή της μαγνητικής αποκλίσεως είναι σχεδόν μηδαμινή. Γνωρίζουμε τη λεπτομέρεια σήμερα, αφού η διεθνής χαρτογραφική υπηρεσία

Για αιώνες έχει πραγματοποιήσει επίμονες, λεπτομερείς και σχολαστικές παρατηρήσεις. Την εποχή του Κολόμβου όλα αυτά ήταν άγνωστα.

Ο Χριστόφορος Κολόμβος θεμελιώνει την αρχή ότι, όχι μόνο υπάρχει απόκλιση της μαγνητικής βελόνας, αλλά παρουσιάζει διαφορές και διακυμάνσεις ανάλογα με τη γεωγραφική θέση, οι οποίες κυρίως χαρακτηρίζονται από τη διαφορά μήκους.

Στο Κολόμβο οφείλουμε τη μεταγενέστερη ανακάλυψη της υπάρξεως των μαγνητικών πόλων της γης παρότι η μαθηματική επισήμανση, μελέτη και απόδειξη οφείλεται στους επιστήμονες του 17ου αιώνα. Για να μπορούν να εκτελούν ασφαλή ταξίδια, ο Κολόμβος και οι βοηθοί του χρησιμοποιούν την τιμή της μαγνητικής αποκλίσεως για να καθορίσουν(χονδροειδώς βέβαια) το γεωγραφικό μήκος. Αρχίζει να θεμελιώνεται μια νέα εποχή. Είναι η εποχή κατά την οποία κυριαρχεί το στοιχείο χρόνος ή το αντίστοιχο δεδομένο της ωρικής γωνίας. Από εδώ αρχίζει η μεγάλη και εκτεταμένη εποχή όπου ο ναυτίλος αρχίζει να προσδιορίζει τις συντεταγμένες της γεωγραφικής θέσεως. Το λεγόμενο στίγμα.

Ο υπολογισμός της ωρικής γωνίας προκαλεί τη εισαγωγή και καθιέρωση του σφαιρικού τριγώνου στις καθημερινές μαθηματικές ασχολίες του ναυτίλου. Αρχίζει η αναλυτική παρουσίαση του σπουδαίου αυτού τριγώνου και αρχίζουν να δίδονται οι πρώτες εξηγήσεις των ιδιοτήτων του. Ο ναυτίλος αρχίζει να αποκτά σχετική αντίληψη της σημασίας του τριγώνου, διότι χωρίς αυτή η έννοια του υπολογισμού του μήκους καθίσταται δύσκολη.

Ακολουθεί η ίδρυση της επιτροπής του μήκους στο Λονδίνο και το ενδιαφέρον κατασκευής του ακριβούς ναυτικού χρονομέτρου. Οι σταθμοί εκπομπής ραδιοτηλεγραφικών σημάτων δεν υπάρχουν ακόμη και το χρονόμετρο πρέπει να είναι από μηχανικής άποψης τέλειο, για να παρέχει ακριβείς ενδείξεις κατά τα ταξίδια.
Η κατασκευή του πρώτου χρονομέτρου είναι ομολογουμένως ενδιαφέρουσα. Το αρχικό χρονόμετρο περίπλοκο, ογκώδες, έχει υπερβολικό βάρος για τις διαστάσεις του, αποδίδει αξιοθαύμαστα αποτελέσματα και καθιερώνεται ως απαραίτητο εργαλείο για τη ναυσιπλοΐα και τους ναυτικούς υπολογισμούς.
Για πολλά χρόνια από την εποχή του Κολόμβου και έπειτα κυριαρχεί ένα εκ των στοιχείων του τριγώνου, η ωρική γωνία. Αυτή προκαλεί την προσοχή, αυτή περιβάλλεται με το ενδιαφέρον της εποχής.

Περισσότερο όμως η συσχέτιση του σφαιρικού τριγώνου θέσεως προκαλεί την οδό προς τη κανονική εξέλιξη της ναυτιλίας. Η ναυτιλία παύει να είναι τέχνη και ανάγεται σε επιστήμη. Ο ναυτίλος μορφώνεται και αναγκαστικά προσθέτει στα μαθήματα εκ των οποίων εξαρτάται η επαγγελματική του κατάρτιση, νέα θεωρητικά και επιστημονικά θέματα.

Όλα αυτά προκαλούνται εκ της στενής πλέον εργασίας πράξης και θεωρίας, όπως και δια της κυριαρχίας της σφαιρικής τριγωνομετρίας επί των προβλημάτων, τα οποία από τούδε καθημερινώς πρέπει να επιλύονται στο πλοίο. Νέα πράγματα και καταρχήν δύσκολα πράγματα για το ναυτίλο της μακρινής εκείνης εποχής. Τριγωνομετρικοί τύποι. Λογάριθμοι. Προσθαφαίρεση λογαρίθμων σε συνδυασμό με προσθαφαίρεση φυσικών αριθμών. Μετατροπή χρόνου σε μήκος και τανάπαλι. Όλα αυτά απαιτούν προσοχή μελέτη, και άμεμπτο χειρισμό κατά την εκτέλεση των υπολογισμών.

Η ευθεία θέσεως είναι ακόμα άγνωστη για το ναυτίλο. Είναι όμως γνωστή στον μαθηματικό, τον επιστήμονα και τον αστρονόμο. Και αναρωτιέται κανείς σήμερα γιατί όλα αυτά τα γνωστά προσόντα της αστρονομικής ναυτιλίας, δεν διδάχθηκαν από τη πρώτη στιγμή, κατά την οποία στη καθημερινή ζωή του ναυτίλου εισήχθηκε η θεωρία και ο υπολογισμός του μήκους.

Όπως και να έχουν τα πράγματα, η παροχή επιστημονικών διδαχών και βοηθημάτων, την εποχή εκείνη, έγινε σύμφωνα με την ισχύουσα νοοτροπία. Αυτό ακριβώς συντέλεσε στο να επεκταθεί το χρονικό διάστημα της δυναστείας της ωρικής γωνίας, και στο να στασιμοποιηθεί η περαιτέρω επιστημονική και πρακτική πρόοδος της θεωρητικής ναυτιλίας.

Επειδή όμως η φορά της προόδου είναι ακαταμάχητη, η καθιερωμένη τακτική της διδαχής υποχωρεί. Μαζί με τις οδηγίες που δίδονται στο ναυτίλο για τον υπολογισμό του μήκους, δόθηκε και η ένδειξη ότι η ακρίβεια του υπολογισμού ήταν άριστη όταν το παρατηρούμενο σώμα διέρχεται από τον πρώτο κάθετο. Ο ναυτίλος καταβάλει κάθε προσπάθεια ώστε οι παρατηρήσεις να εκτελούνται τη κατάλληλη χρονική στιγμή, ενώ ειδικοί πίνακες καταρτίζονται για να διευκολύνουν τον ναυτίλο στην εύκολη ένδειξη της καταλληλότερης ώρας.

Υπό αυτές τις συνθήκες φθάνουμε στο τέλος του 19ου αιώνα. Τέσσερις αιώνες δυναστείας της μεθόδου του υπολογισμού του μήκους, παραδίδουν τα σκήπτρα σε νεότερες μεθόδους υπολογισμού του στίγματος. Και η κυριαρχία του τριγωνομετρικού στοιχείου της ωρικής γωνίας του τριγώνου θέσεως, φθάνει στο τέλος της.

Την 25η Νοεμβρίου του 1837 ο Αμερικανός πλοίαρχος Thomas Sumner αναχωρεί από το Τσάρλεστον της Νότιας Καρολίνας με προορισμό το λιμάνι Γκρήνοκ της Σκωτίας. Η εποχή αυτή στον Ατλαντικό, είναι γνωστή για τις κακοκαιρίες και τις συνεχείς νεφώσεις, οι οποίες κυριαρχούν όλου του χώρου από την Ευρώπη ως την Αμερική. Ο πλοίαρχος Σώμνερ αδυνατεί να παρατηρήσει ύψη ουρανίων σωμάτων, μέχρις ότου και μέσω λοξοδρομικών υπολογισμών φθάνει πλησίον στις ακτές τις Ουαλίας.

Την 17η Δεκεμβρίου του έτους του Κυρίου 1837, ο πλοίαρχος κατορθώνει να μετρήσει το ύψος του ηλίου και σπεύδει να προσδιορίσει το στίγμα του.

Το εξ αναμετρήσεως πλάτος σε συνδυασμό με το ύψος αποδίδει μήκος κατά 15 μίλια ανατολικότερα του προσδιοριστικού σημείου.

Αμφιβάλλων, όσον αναφορά την ακρίβεια του στίγματος, ο πλοίαρχος Σώμνερ επαναλαμβάνει τον υπολογισμό με τιμή πλάτους κατά 10 μίλια βορειότερα. Ο δεύτερος υπολογισμός προσδιορίζει στίγμα πλησίον του φάρου Σμωλλς.

Τρίτος παρόμοιος υπολογισμός με βορειότερο πλάτος, τοποθετεί το στίγμα επί της ξηράς και επί των ακτών της Ουαλίας.

Για πρώτη φορά στην ιστορία της ναυτιλίας και επί μερκατορικού χάρτη, ο ναυτίλος αντικρίζει την ευθεία θέσεως. Η εντύπωση είναι βαθειά, ο δε πλοίαρχος Σώμνερ παραδέχεται ότι ανακάλυψε κάτι νέο και επαναστατικό. Αποφασίζει να ακολουθήσει την κατεύθυνση της ευθείας , και πράγματι, μία ώρα μετά βλέπει σε απόσταση έξι μιλιών και επί της πορείας του, τον φάρο Σμωλλς.

Κατά την επιστροφή του στην Αμερική, ο πλοίαρχος αναφέρει επισήμως το εύρημα του. Η επιστήμη έρχεται και πάλι να δώσει τις καθυστερημένες της εξηγήσεις. Το σύστημα επιβεβαιώνεται και επικροτείται ως η αλάνθαστη μέθοδος προσδιορισμού του στίγματος.

Μια νέα περίοδος αρχίζει. Είναι η περίοδος κατά την οποία ισχύει η ευθεία θέσεως. Βρισκόμαστε στην εποχή κατά την οποία η συνεργασία επιστήμης και πρακτικής ναυτιλίας είναι μεν στενή και καθορισμένη, όχι όμως πλήρης. Ο ναυτίλος λίγα σχετικά θεωρητικά πράγματα γνώριζε.

Σε πραγματεία του διάσημου Άγγλου μαθηματικού, συγγραφέως και ναυτίλου κ. Davis συναντάμε μέρη όπου επισήμως διαδηλώνεται η πεποίθηση, ότι ο ναυτίλος έπρεπε να γνωρίζει μόνο τα απαραίτητα για να καθίσταται ικανός να υπολογίζει το μήκος. Οι καθηγητές, φυσικομαθηματικοί, και αστρονόμοι της τότε εποχής, κατά γενικό κανόνα, ήταν καθολικοί ιερωμένοι. Κατά συνεπεία, ο τρόπος διδαχής, η εκλαΐκευση γνώσεων, και η μορφή των βοηθημάτων(βιβλίων, μεθόδων και πινάκων) ακολουθούν το πνεύμα της εποχής. Συντριπτική απόδειξη των ανωτέρω είναι η έκδοση των ολιγοσέλιδων πινάκων οι οποίοι είναι γνωστοί ως πίνακες Μαρτέλλι. Οι συγγραφείς του έργου αυτού, εκ προθέσεως παραμορφώνουν τις ενδείξεις των πινάκων με μοναδικό σκοπό την επικάλυψη της μαθηματικής βάσης στην οποία βασίστηκε ο υπολογισμός των εν λόγω ενδείξεων.

Ο πλοίαρχος Σώμνερ δεν είναι κοινός ναυτίλος. Είναι απόφοιτος του αμερικανικού πανεπιστημίου Χάρβαρδ. Είναι(σε αναλογία με το σύστημα διδαχής της εποχής του) θεωρητικώς μορφωμένος πλοίαρχος. Παρόλα αυτά αγνοεί την από αιώνων ύπαρξη της ευθείας και των ίσων ζενιθιακών αποστάσεων. Τρανή απόδειξη ότι η ήδη εξελιγμένη επιστήμη της αστρονομίας δεν έχει προσφέρει τις γνώσεις τις για το άρτιο και ασφαλές της επαγγελματικής και πλοιαρχικής μορφώσεως.

Το φημισμένο και μνημειώδες θεωρητικό έργο του διάσημου Αμερικανού αστρονόμου Chauvenet, αποτελούμενο από δύο τόμους κυκλοφόρησε την εποχή του πλοιάρχου Σώμνερ, αποδεικνύει(διότι ασχολείται εκτενέστατα με το θέμα) ότι όχι μόνο υπάρχει η ευθεία θέσεως και η χρησιμότητα της αλλά ότι δι' αυτής είναι δυνατό να προκύψουν νεότερες μέθοδοι ναυτιλίας.

Αυτός είναι ο απολογισμός τεσσάρων αιώνων θεωρητικής ναυτιλίας. Τετρακόσια χρόνια αναλώθηκαν σε πειραματισμούς με βάση την εσφαλμένη εισήγηση.

Η άρρηκτη σχέση, ωρικής γωνίας και ευθείας θέσεως, υποκρύπτεται. Ο ναυτίλος υποχρεούται να ταξιδεύει με αμφιβολίες και με ενδοιασμούς. Σωρεία βιβλίων και ναυτικών πινάκων κυκλοφορεί διαιωνίζουσα εσφαλμένα την αντίληψη των πραγμάτων. Η εξέλιξη της θεωρητικής ναυτιλίας αναχαιτίζεται, και η πρόοδος δε θα ήταν γνωστή, αν δεν προέκυπτε η τυχαία ανακάλυψη του πλοιάρχου Σώμνερ.

Αυτά είναι τα μαθήματα του παρελθόντος. Η δε απαρχή της θετικής μαθηματικής και ορθολογικής μελέτης της σφαιρικής τριγωνομετρίας, όπως και η τακτική διδαχής της στα ναυτικά σχολεία, οφείλεται στη παρεμβολή του περιστατικού, εκ του οποίου ο πρακτικός ναυτίλος γνώρισε την ευθεία θέσεως.

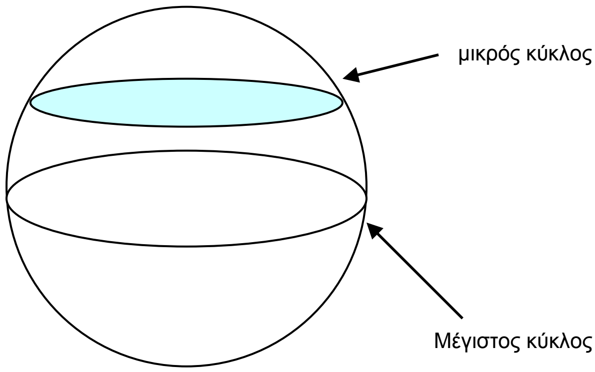
Εν κατακλείδι ο Γάλλος αξιωματικός ναυτικού Marq St. Hiaire παρουσιάζει τη νεότερη μέθοδο χάραξης της ευθείας θέσεως, μέθοδος που διατηρείται μέχρι σήμερα, αντικαθιστώντας την εκτεταμένη και ιδιαίτερα χρονοβόρα αρχική μέθοδο δύο διαφορετικών στιγμάτων.

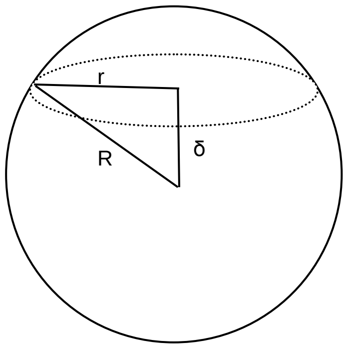
<u>Κεφάλαιο 2ο</u>

2.1. ΣΦΑΙΡΑ

Α. <u>Σφαίρα</u> λέγεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του χώρου που απέχουν από σταθερό σημείο του χώρου Ο σταθερή απόσταση R.
Το σταθερό σημείο Ο ονομάζεται **κέντρο** της σφαίρας. Η σταθερή απόσταση R λέγεται **ακτίνα** της σφαίρας.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα, του οποίου τα άκρα είναι σημεία της σφαίρας καλείται **χορδή** της σφαίρας. Αν η χορδή διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας λέγεται **διάμετρος** αυτής.

Β. <u>θέσεις επιπέδου και σφαίρας</u>. Έστω σφαίρα με ακτίνα R και δ η απόσταση του κέντρου της από ένα επίπεδο:





1) Αν δ>R η σφαίρα και το επίπεδο δεν έχουν κοινά στοιχεία.
2) Αν δ<R η σφαίρα και το επίπεδο έχουν ένα κοινό σημείο(εφάπτονται).
3) Αν δ<R η σφαίρα και το επίπεδο τέμνονται. Η τομή σφαίρας και επιπέδου είναι κύκλος.

Αν α) δ<R και δ≠0 ο κύκλος λέγεται **μικρός**.
β) δ=0 ο κύκλος λέγεται **μέγιστος**.
Αν r η ακτίνα του σχηματιζόμενου κύκλου, τότε $R^2 = \delta^2 + R^2$

Γ. <u>ιδιότητες μικρών κύκλων</u>.

α) δυο μικροί κύκλοι σφαίρας που απέχουν εξίσου από το κέντρο της είναι ίσοι.
β) δυο μικροί κύκλοι που απέχουν άνισα από το κέντρο της σφαίρας είναι άνισοι και μικρότερος είναι εκείνος που απέχει περισσότερο από το κέντρο.
γ) η ευθεία που ενώνει το κέντρο της σφαίρας με το κέντρο του κύκλου είναι κάθετη στο επίπεδο του κύκλου.

Δ. Ιδιότητες μέγιστων κύκλων.

α) οι μέγιστοι κύκλοι της σφαίρας είναι όλοι ίσοι μεταξύ τους και διχοτομούν αλλήλους.
β) η τομή δυο μέγιστων κύκλων της σφαίρας είναι κοινή διάμετρος τους.
γ) κάθε μέγιστος κύκλος χωρίζει τη σφαίρα σε δυο ίσα μέρη που ονομάζονται **ημισφαίρια**.
δ) δια δυο σημείων της σφαίρας, τα οποία δεν είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, διέρχεται **ένας και μόνο** μέγιστος κύκλος, ενώ αν τα σημεία αυτά είναι άκρα της ίδιας διαμέτρου, τότε διέρχονται δι΄αυτών άπειροι μέγιστοι κύκλοι.
ε) η συντομότερή διαδρομή μεταξύ δυο σημείων της σφαίρας είναι τόξο μέγιστου κύκλου, το οποίο ορίζεται από τα σημεία αυτά.

Ε. παράλληλοι κύκλοι.

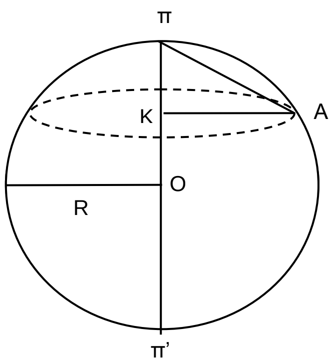
Παράλληλοι κύκλοι μιας σφαίρας είναι οι κύκλοι των οποίων τα επίπεδα είναι παράλληλα.

ΣΤ. Άξονας κύκλου.

Άξονας κύκλου καλείται η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και είναι κάθετη στο επίπεδο του.

Ζ. πόλοι, πολική απόσταση και σφαιρική ακτίνα κύκλου σφαίρας.

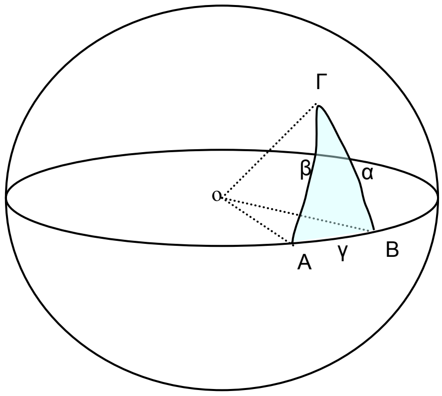
Πόλοι κύκλου σφαίρας είναι τα σημεία στα οποία ο άξονας του κύκλου τέμνει την επιφάνεια της σφαίρας.



Άξονας του κύκλου (κ, κα) είναι η ευθεία ππ΄ και πόλοι τα σημεία π και π΄.
α) κάθε πόλος τυχόντος κύκλου ισαπέχει από όλα τα σημεία του κύκλου αυτού.
β) τα τόξα των μέγιστων κύκλων που περιέχονται μεταξύ των πόλων του κύκλου σφαίρας και των σημείων του κύκλου αυτού, είναι ίσα.
Η απόσταση κάθε σημείου του κύκλου σφαίρας από το πλησιέστερο πόλο του κύκλου είναι σταθερή και λέγεται **πολική απόσταση**. Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει το πόλο του κύκλου με τυχόν σημείο του κύκλου λέγεται **σφαιρική ακτίνα** του κύκλου. Στο σχήμα πολική απόσταση του κύκλου (κ, κα) είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΠΑ και σφαιρική ακτίνα το τόξο ΠΑ του μέγιστου κύκλου ΠΑΠ΄.

2.2. ΣΦΑΙΡΙΚΑ ΤΡΙΓΩΝΑ

Α. Σφαιρικό τρίγωνο καλείται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας, το οποίο περιέχεται μεταξύ τριών τόξων μέγιστων κύκλων της σφαίρας, εφόσον τα τόξα αυτά είναι μικρότερα από τη ημιπεριφέρεια.
Στο σφαιρικό τρίγωνο θεμελιώνεται όλη η θεωρία της σφαιρικής τριγωνομετρίας.
Στο σχήμα έχουμε τρεις μέγιστους κύκλους οι οποίοι τεμνόμενοι σχηματίζουν το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Αν το κέντρο Ο ενώσομε με τα σημεία Α, Β, Γ σχηματίζεται η τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ.



Στη τρίεδρη αυτή γωνία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Οι πλευρές (ΑΒ) = γ, (ΒΓ) = α, (ΑΓ) = β του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ έχουν το ίδιο μέτρο γ, α, β αντίστοιχα με τις επίπεδες γωνίες ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΑ της στερεάς γωνίας. Παρατηρούμε ότι οι **πλευρές του σφαιρικού τριγώνου μετρούνται σε μοίρες**. Οι γωνίες Α, Β, Γ του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ έχουν το ίδιο μέτρο με τις δίεδρες Γ–ΟΑ-ΑΒ, Γ-ΒΟ-ΒΑ, ΟΓ-ΓΑ-ΓΒ της τρίεδρης Ο.ΑΒΓ

Β. ιδιότητες σφαιρικού τριγώνου.

1. Το άθροισμα των πλευρών του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερο των 360^o .
$α+β+γ<360^o$

2. Κάθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη των άλλων δυο πλευρών και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

3. Το άθροισμα των γωνιών του σφαιρικού τριγώνου περιέχεται μεταξύ των 180^o και των 540^o . $180^o<Α+Β+Γ<540^o$.

4. Κάθε γωνία σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180^o.

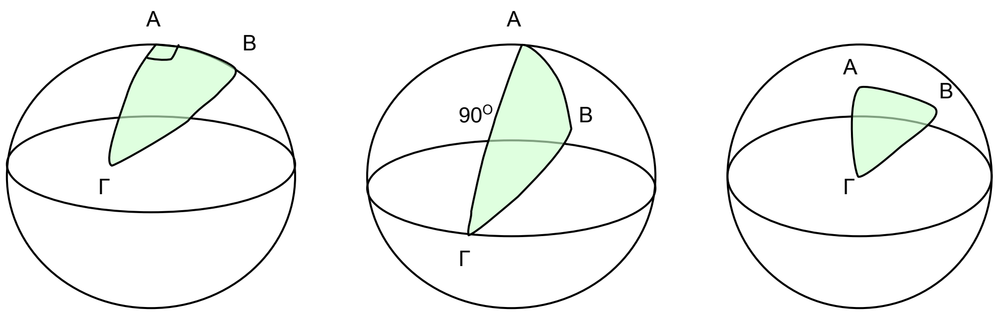
5. Απέναντι στη μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του σφαιρικού τριγώνου και αντίστροφα.

6. Κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου αν αυξηθεί κατά 180^o γίνεται μεγαλύτερη από το άθροισμα των δυο άλλων γωνιών του. $Α+180^o > Β+Γ$.

7. Αν Α>Β>Γ τότε α>β>γ

Γ. <u>ισότητα σφαιρικών τριγώνων</u>. Δυο σφαιρικά τρίγωνα της ίδιας σφαίρας είναι ίσα όταν έχουν:
- μια πλευρά και τις προσκείμενες σ΄αυτήν γωνίες ίσες .
- μια γωνία ίση και τις πλευρές που τη περιέχουν ίσες.
- και τις τρεις πλευρές ίσες.
- και τις τρεις γωνίες ίσες.

Δ. <u>είδη σφαιρικών τριγώνων</u>. Τα σφαιρικά τρίγωνα μπορεί να έχουν μια ή δυο ή τρεις γωνίες ορθές, οπότε λέγονται **ορθογώνια** ή **δισορθογώνια** ή **τρισορθογώνια** αντίστοιχα. Το σφαιρικό τρίγωνο του οποίου η μια πλευρά έχει 90^o ονομάζεται **ορθόπλευρο**. Αν έχει δυο ή τρεις πλευρές με μέτρο 90^o λέγεται αντίστοιχα **δισορθόπλευρο** ή **τρισορθόπλευρο**. Επίσης, όπως στα επίπεδα τρίγωνα έτσι και στα σφαιρικά έχουμε ισόπλευρα, ισοσκελή και σκαληνά σφαιρικά τρίγωνα. **Τυχόν** (ή πλάγιο ή κοινό) σφαιρικό τρίγωνο λέγεται εκείνο που δεν έχει αναγκαστικά μια πλευρά ή μια γωνία μέτρου 90^o.



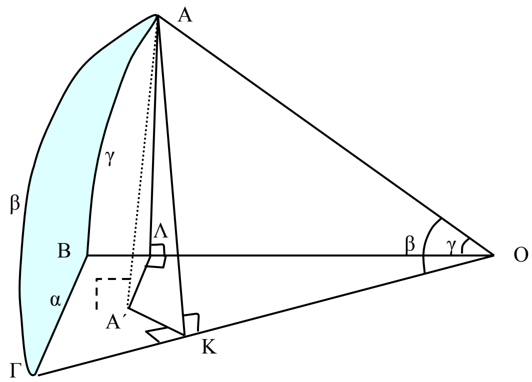
2.3 ΣΧΕΣΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ ΤΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ ΤΩΝ ΤΥΧΟΝΤΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ.

2.3.1 <u>ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΗΜΙΤΟΝΩΝ</u>.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ισχύει:

$$\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\eta\mu\beta}{\eta\mu B} = \frac{\eta\mu\gamma}{\eta\mu\Gamma}$$

Έστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ. Έστω Ο το κέντρο της σφαίρας(ακτίνα ίση με τη μονάδα) στην οποία ανήκει και Ο.ΑΒΓ η αντίστοιχη τρίεδρη.



από τη κορυφή Α φέρομε κάθετη ΑΑ΄ στην έδρα ΒΟΓ. Από το ίχνος Α΄ φέρομε τις κάθετες Α΄Λ και Α΄Κ αντίστοιχα προς τις ΟΒ και ΟΓ. Φέρομε τις ΑΛ και ΑΚ οι οποίες θα είναι κάθετες προς τις ΟΒ και ΟΓ.
Οι γωνίες ΑΛΑ΄ και ΑΚΑ΄ είναι οι αντίστοιχες επίπεδες των δίεδρων Α-ΒΟ-Γ και Α-ΟΓ-Β, δηλαδή έχουν το ίδιο μέτρο με τις σφαιρικές γωνίες Β, Γ.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΛ έχομε: $ημγ = ΑΛ/ΑΟ$ (1)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΑ΄ έχομε: $ημΓ = ΑΑ΄/ΑΚ$ (2)

Διαιρώντας τις (1) και (2) κατά μέλη: $ημγ/ημΓ = ΑΛ \bullet ΑΚ/ΑΟ \bullet ΑΑ΄$ (3)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΚ έχομε $ημβ = ΑΚ/ΑΟ$ (4)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΛΑ΄ έχομε: $ημΒ = ΑΑ΄/ΑΛ$ (5)

Διαιρώντας τις (4) και (5) κατά μέλη: $ημβ/ημΒ = ΑΛ \bullet ΑΚ/ ΑΟ \bullet ΑΑ΄$ (6)

Από (3) και (6) προκύπτει → $\frac{ημβ}{ημΒ} = \frac{ημγ}{ημΓ}$

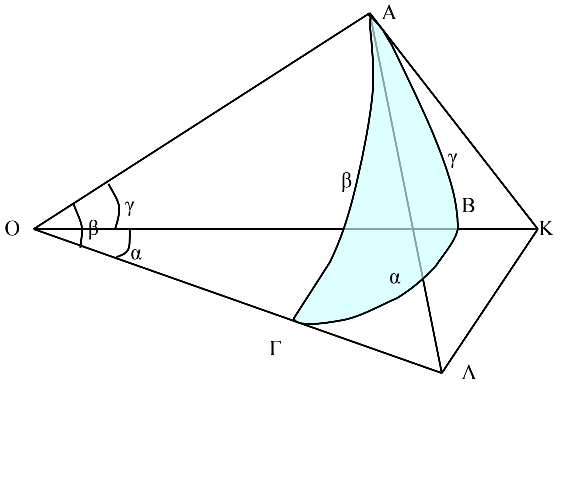
Αν από το σημείο Β φέρομε τη κάθετη στην έδρα ΑΓΟ, εργαζόμενοι ανάλογα προκύπτει ο τύπος των ημιτόνων.

2.3.2 <u>ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ</u>.

Σε κάθε σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι εξής τύποι των συνημίτονων.

$συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνΑ$
$συνβ = συνγσυνα + ημγημασυνΒ$
$συνγ = συνασυνβ + ημαημβσυνΓ$

Έστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ και γωνίες Α, Β, Γ. Έστω Ο το κέντρο της σφαίρας, στην οποία ανήκει και της οποίας τη γωνία θεωρούμε ίση με τη μονάδα. Έστω Ο.ΑΒΓ η αντίστοιχη τρίεδρη γωνία του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ. Φέρομε στο Α τις εφαπτόμενες στα τόξα ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, οι οποίες τέμνουν τις προεκτάσεις των πλευρών ΟΒ και ΟΓ στα σημεία Κ και Λ.



Το μέτρο της επίπεδης γωνίας ΚΑΛ είναι ίση με το μέτρο της γωνίας Α του σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ.
Από ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΚ έχομε:

εφγ = ΑΚ/ΟΑ = ΑΚ/1 → ΑΚ=εφγ (1)

συνγ = ΟΑ/ΟΚ = 1/ΟΚ → ΟΚ=1/συνγ (2)

Από ορθογώνιο τρίγωνο ΟΑΛ έχομε:

εφβ = ΑΛ/ΟΑ = ΑΛ/1 → ΑΛ= εφβ (3)

συνβ = ΟΑ/ΟΛ = 1/ΟΛ → ΟΛ=1/συνβ (4)

Από την επίπεδη τριγωνομετρία για το τρίγωνο ΑΚΛ ισχύει:

$$(\text{ΚΛ})^2 = (\text{ΑΚ})^2 + (\text{ΑΛ})^2 – 2(\text{ΑΚ})(\text{ΑΛ})\text{συνΑ} \qquad (5)$$

Ομοίως στο τρίγωνο ΟΚΛ ισχύει:

$$(\text{ΚΛ})^2 = (\text{ΟΚ})^2 + (\text{ΟΛ})^2 – 2(\text{ΟΚ})(\text{ΟΛ})\text{συνα} \qquad (6)$$

Από (5) και (6) επειδή τα πρώτα μέλη είναι ίσα, έχομε:

$\text{εφ}^2\text{γ}+\text{εφ}^2\text{β} – 2\text{εφγεγβσυνΑ}=1/\text{συν}^2\text{γ} + 1/\text{συν}^2\text{β} – 2 \bullet 1/\text{συνγ}\bullet 1/\text{συνβ συνα}$ (8)

$\rightarrow 2\text{συνα}/\text{συνβσυνγ}–2\text{ημβημγσυνΑ}/\text{συνβσυνγ}=1/\text{συν}^2\text{β}–\text{ημ}^2\text{β}/\text{συν}^2\text{β}+1/\text{συν}^2\text{γ}-\text{ημ}^2\text{γ}/\text{συν}^2\text{γ}$

$(2\text{συνα}-2\text{ημβημγσυνΑ})/\text{συνβσυνγ}=(1-\text{ημ}^2\text{β})/\text{συν}^2\text{β}+(1-\text{ημ}^2\text{γ})/\text{συν}^2\text{γ}$

$2(\text{συνα}-\text{ημβημγσυνΑ})/\text{συνβσυνγ}=\text{συν}^2\text{β}/\text{συν}^2\text{β}+\text{συν}^2\text{γ}/\text{συν}^2\text{γ}$

2(συνα-ημβημγσυνΑ)/συνβσυνγ=2

συνα – ημβημγσυνΑ = συνβσυνγ

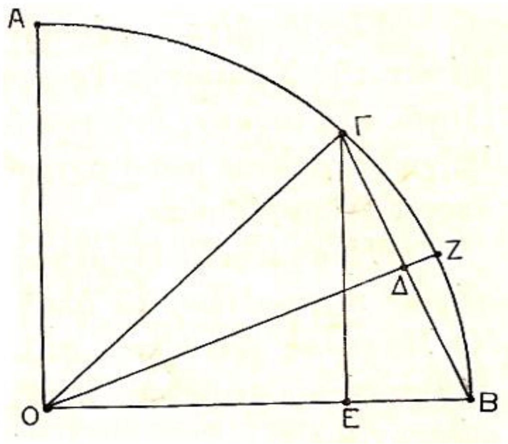
συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνΑ

ανάλογα αποδεικνύονται οι υπόλοιποι τύποι, οι οποίοι όμως παρουσιάζουν το μειονέκτημα, ότι **δεν είναι λογιστοί δια των λογαρίθμων**.

2.3.3 ΠΑΡΗΜΙΤΟΝΟ – ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΟ.

Η διαφορά 1 – συνω καλούμε **παρημίτονο** (versine) του τόξου ω. Το μισό της διαφοράς αυτής καλούμε **ημιπαρημίτονο** (haversine) του τόξου ω.
Ο καθιερωμένος τρόπος με τον οποίο εμφανίζεται στους τριγωνομετρικούς τύπους και εξισώσεις είναι:

$$\text{παρ } A = 2\text{ημ}^2 A/2$$



ΗμΓΟΒ = ΕΓ/ΟΓ με ΕΒ το παρημίτονο της γωνίας αυτής.

Η ακτίνα ΟΖ διχοτομεί τη χορδή ΓΒ στο σημείο Δ. Οι ευθείες ΟΓ και ΟΒ είναι επίσης ακτίνες του αυτού κύκλου. Το τμήμα ΓΔ ισούται με το τμήμα ΔΒ.

ΓΟΔ = ΔΟΒ = ΓΟΒ/2 (1)

ημΕΓΒ = ΕΒ/ΒΓ (2)

ΓΔΟ =ΓΕΟ (ορθές γωνίες) (3)

ΓΗΔ = ΟΗΕ (κατά κορυφήν) (4)

Παρατηρούμε από (3), (4) ότι τα τρίγωνα ΓΗΔ και ΟΗΕ έχουν δυο γωνίες ίσες μια προς μια άρα και η τρίτη γωνία θα είναι ίση. Δηλαδή:

ΕΓΒ = ΗΟΕ = ΓΟΒ/2 (5)

Από (2), (5) ΕΒ/ΒΓ = ημΕΓΒ = ημΓΟΒ/2

Δηλαδή ΕΒ = ημΓΟΒ/2 • ΒΓ

Από ΓΟΔ τρίγωνο έχω ημΓΟΒ/2 = ΓΔ/ΟΓ = ΓΔ = ΒΓ/2 (ακτίνα ίση με μονάδα)

Άρα ΕΒ = ημΓΟΒ/2 • 2ημΓΟΒ/2 = 2ημ^{2}ΓΟΒ/2.

Η έννοια του ημιπαρημιτόνου καθιερώθηκε για να διευκολύνει τους ναυτικούς στις πράξεις τους, επειδή με τη χρήση του αποφεύγονται οι πράξεις με αρνητικούς αριθμούς, αφού το ημιπαρημίτονο είναι πάντα μη αρνητικό.

(πράγματι 1≥ συνA → 1 - συνA≥0 και ημ^{2}A/2≥0)

2.3.4 <u>ΤΥΠΟΙ ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΩΝ</u>.

Από τους τύπους των συνημίτονων ισχύει: συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνA
Αλλάζουμε πρόσημα και προσθέτουμε τη μονάδα.

1 –συνα =1 – συνβσυνγ –ημβημγσυνA (ημπρA = 1-συνA/2, συνA=1-2ημπρA)

=1 – συνβσυνγ – ημβημγ(1 – 2ημπρA) =

=1 – συνβσυνγ – ημβημγ + 2ημβημγημπρA=

=1 – (συνβσυνγ + ημβημγ) + 2ημβημγημπρA=

=1 – συν(β-γ) + 2ημβημγημπρA=

=2[1 – συν(β – γ)]/2 + 2ημβημγημπρA=

=2ημπρ(β – γ) + 2ημβημγημπρA=

Όμως 1- συνα = 2 • (1 – συνα)/2 = 2ημπρα. Άρα η παραπάνω σχέση γίνεται:

2ημπρα = 2ημπρ(β – γ) + 2ημβημγημπρA

ημπρα = ημπρ(β – γ) + ημβημγημπρA

ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΑ ΠΛΕΥΡΩΝ

ημπρα = ημπρ(β – γ) + ημβημγημπρΑ
ημπρβ = ημπρ(γ – α) + ημγημαημπρΒ
ημπργ = ημπρ(α – β) + ημαημβημπρΓ

οι παραπάνω τύποι των ημιπαρημιτόνων χρησιμοποιούνται για την επίλυση σφαιρικών τριγώνων όταν δίνονται και οι τρεις πλευρές ή όταν δίνονται δυο πλευρές και η περιεχομένη μεταξύ τους γωνία.

Ισχύει συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνΑ

→ συνΑ = (συνα – συνβσυνγ)/ημβημγ

Αλλάζουμε πρόσημα και προσθέτουμε τη μονάδα:

1 –συνΑ=1–(συνα–συνβσυνγ)/ημβημγ = (ημβημγ – συνα + συνβσυνγ)/ημβημγ

= [(συνβσυνγ + ημβημγ) – συνα]/ημβημγ = [συν(β-γ) - συνα]/ημβημγ =

Λόγω της σχέσης συνΑ – συνΒ = -2ημ(Α+Β)/2 • ημ(Α-Β)/2

και 1 – συνΑ = 2ημπρΑ η παραπάνω σχέση γίνεται

1-συνΑ=2ημπρΑ= - [2ημ(β-γ+α)/2 • ημ(β-γ-α)/2]/ημβημγ =

Όμως ημ(-χ) = -ημχ άρα

2ημπρΑ= - [2ημ(α+β-γ)/2 • (-)ημ(α-β+γ)/2]/ημβημγ =

→ ημπρΑ= [ημ(α+β-γ)/2 • ημ(α-β+γ)/2]/ημβημγ

Επειδή 2τ = α + β + γ → 2τ – 2γ = α + β + γ – 2γ → 2(τ - γ) = α + β - γ

→ τ – γ = (α + β – γ)/2

Ομοίως τ – β = (α – β + γ)/2

Άρα ημπρΑ = [ημ(τ - β)ημ(τ – γ)]/ημαημβ →

→ ημπρΑ = ημ(τ – β)ημ(τ – γ)στεμβστεμγ

.

ΗΜΙΠΑΡΗΜΙΤΟΝΑ ΓΩΝΙΩΝ

ημπρΑ = ημ(τ – β)ημ(τ – γ)στεμβστεμγ
ημπρΒ = ημ(τ – γ)ημ(τ – α)στεμγστεμα
ημπρΓ = ημ(τ – α)ημ(τ – β)στεμαστεμβ

πολλές φορές οι ναυτιλλόμενοι χρησιμοποιούν τον τύπο:

ημπρΑ = [ημπρα ~ ημπρ(β ~ γ)]στεμβστεμγ

ο παραπάνω τύπος αποδεικνύεται ως εξής:

ισχύει ότι ημπρΑ= (1 – συνΑ)/2 και συνΑ= (συνα – συνβ)/ημβημγ

επίσης συν(β – γ) = ημβημγ + συνβσυνγ

ημπρΑ = ½(1 – συνΑ)= ½ [1 - (συνα - συνβσυνγ)/ημβημγ] =

= ½ (ημβημγ + συνβσυνγ – συνα)/ημβημγ = ½ [-συνα + συν(β-γ)]/ημβημγ =

= ½ [1 – συνα – 1 + συν(β-γ)]/ημβημγ =½ [(1-συνα) – (1-συν(β-γ))]στεμβστεμγ

= (1 – συνα)/2 – [1 – συν(β-γ)]/2στεμβστεμγ =

= [ημπρα – ημπρ(β-γ)]στεμβστεμγ

2.3.5 ΤΥΠΟΙ ΤΩΝ ΤΕΣΣΑΡΩΝ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ.

Οι τύποι των τεσσάρων συνεχών στοιχείων του σφαιρικού τριγώνου είναι:

σφαστεμΒ = στεμγσφΑ + σφγσφΒ
σφαστεμΓ = στεμβσφΑ + σφγσφΓ
σφβστεμΓ = στεμασφΒ + σφγσφΓ
σφβστεμΑ = στεμγσφΒ + σφγσφΑ
σφγστεμΑ = στεμβσφΓ + σφγσφΑ
σφγστεμΒ = στεμασφΓ + σφγσφΒ

Ισχύει:

συνα = συνβσυνγ + ημβημγσυνΑ
συνβ = συνγσυνα + ημγημασυνΒ

από τους τύπους αυτούς προκύπτει

συνα = συνΑημβημγ + (συνγσυνα + ημγημασυνΒ)συνγ =

(επειδή ημβ= (ημαημΒ/ημΑ))

=συνΑημγ(ημαημΒ/ημα) + συνΒημγημασυνγ + συν^{2}γσυνα →

συνα – συν^{2}γσυνα = σφΑημΒημαημγ + συνΒημγημασυνγ →

συνα(1 – συν^{2}γ) = ημαημγ(σφΑσφΒ + συνΒσυνγ) →

συνα(1 – συν^{2}γ)/ημαημγ = σφΑσφΒ + συνΒσυνγ →

συναημ^{2}γ/ημαημγ = σφΑσφΒ + συνΒσυνγ →

σφαημγ = σφΑσφΒ + συνΒσυνγ →

διαιρούμε με ημγημΒ:

σφαημγ/ ημγημΒ = σφΑσφΒ/ ημγημΒ + συνΒσυνγ/ημγημΒ

→ σφαστεμΒ = στεμγσφΑ + σφγσφΒ

Τύποι της Τριγωνομετρίας

1)$ημ^2χ+συν^2χ=1 \Leftrightarrow ημ^2χ= 1-συν^2χ$

2)σφΑ=συνΑ/ημΑ

3)στεμΒ=1/ημΒ

4)στεμΓ=1/ημΓ

Ονομάζονται τύποι των 4 συνεχών στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, γιατί κάθε τύπος αρχίζει από μία πλευρά και προχωράει κατά 4 συνεχή στοιχεία του τριγώνου, είτε από δεξιά είτε από αριστερά και γυρίζει πίσω κατά 2 στοιχεία.

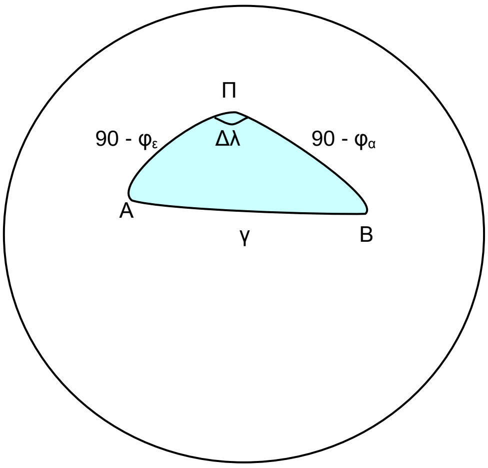
Οι τύποι αυτοί βρίσκουν άμεση εφαρμογή στην επίλυση του τριγώνου θέσεως καθώς και στην σύνταξη των πινάκων ABC.

Κάθε ένας από τους τύπους των 4 συνεχών στοιχείων, μπορεί με κατάλληλους απλούς μετασχηματισμούς να γραφτούν σε άλλους χρήσιμους τύπους.

Κεφάλαιο 3ο

3.1 ΤΡΙΓΩΝΟ ΟΡΘΟΔΡΟΜΙΑΣ.

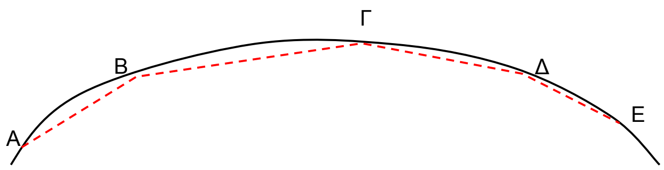
Η σφαιρική τριγωνομετρία έχει άμεση εφαρμογή σε προβλήματα της γήινης και της ουράνιας σφαίρας.
Μια πρώτη εφαρμογή της είναι το λεγόμενο **τρίγωνο ορθοδρομίας** (**γήινο τρίγωνο**).



το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ του σχήματος είναι το τρίγωνο ορθοδρομίας, το οποίο βρίσκεται πάνω στην επιφάνεια της γης και σχηματίζεται μεταξύ του τόπου εκκινήσεως Α ενός πλοίου, του τόπου αφίξεως Β και του πόλου Π της γης ο οποίος είναι ομώνυμος με το πλάτος εκκινήσεως.
Τα στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας είναι:
α) το τόξο ΠΑ του μεσημβρινού του τόπου εκκινήσεως, το οποίο ισούται με $90 - φ_ε$ (όπου $φ_ε$ το πλάτος του τόπου εκκινήσεως Α)
β) το τόξο ΠΒ του μεσημβρινού του τόπου αφίξεως, το οποίο ισούται με $90 - φ_α$ (όπου $φ_α$ το πλάτος του τόπου αφίξεως Β),αν τα $φ_α$, $φ_ε$ είναι **ομώνυμα** και $90 + φ_α$ αν $φ_α$, $φ_ε$ **ετερώνυμα**.
γ) γ η ορθοδρομική απόσταση των δυο τόπων.
δ) η γωνία Π, η οποία ισούται με τη διαφορά μηκών Δλ μεταξύ των τόπων Α,Β.
ε) η γωνία Α, που αποτελεί την αρχική πλεύση και η γωνία Β, από την οποία βρίσκεται η τελική πλεύση(η τελική πλεύση σπάνια χρησιμοποιείται).

3.2 <u>ΟΡΘΟΔΡΟΜΙΑ (GREAT CIRCLE SAILING).</u>

Λέγεται το μικρότερο από 180^0 τόξο του μέγιστου κύκλου, που συνδέει δύο τόπους(σημεία). Το τόξο αυτό του μέγιστου κύκλου είναι το ελάχιστο από τα άπειρα τόξα που συνδέουν τους δυο αυτούς τόπους. Η ορθοδρομία λοιπόν είναι η συντομότερη απόσταση μεταξύ δυο τόπων πάνω στην επιφάνεια της γης. Το τόξο αυτό λέγεται και **ορθοδρομικό τόξο** και κατά την ορθοδρομική πλεύση προσπαθούμε να κινηθούμε όσο το δυνατό πάνω σε αυτό.
Το μέτρο του ορθοδρομικού τόξου σε πρώτα της μοίρας μας δίνει την **ορθοδρομική απόσταση** σε ναυτικά μίλια. Χαρακτηριστικό της ορθοδρομίας είναι ότι στρέφει το κυρτό προς τους πόλους και τα κοίλα πρας τον ισημερινό.
Επειδή οι μεσημβρινοί της γης δεν είναι παράλληλοι μεταξύ τους, αλλά συγκλίνουν και τέμνονται στους πόλους, η ορθοδρομία τους τέμνει διαρκώς με μεταβαλλόμενη γωνία(κάθε μία από αυτές αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη **ορθοδρομική πλεύση**). Άρα για να ακολουθήσουμε ορθοδρομική πλεύση, πρέπει συνεχώς να μεταβάλλουμε τη πορεία του πλοίου. Επειδή όμως αυτό είναι δύσκολο, ακολουθούμε μια τεθλασμένη γραμμή που εγγράφουμε στο ορθοδρομικό τόξο όπως φαίνεται στο σχήμα.



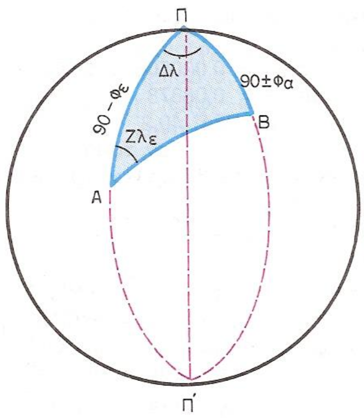
Φυσικά όσο περισσότερες είναι οι πλευρές της τεθλασμένης γραμμής, τόσο περισσότερο αυτή προσεγγίζει το ορθοδρομικό τόξο. Ο πλους πάνω σε αυτή τη τεθλασμένη γραμμή λέγεται **ορθοδρομικό πλους**.

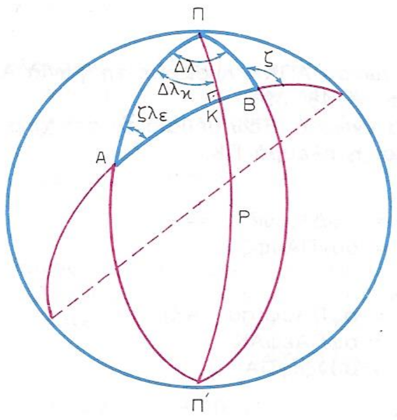
3.3. <u>ΛΟΞΟΔΡΟΜΙΑ (RUMBLINE).</u>

Είναι η καμπύλη που συνδέει δυο τόπους της γήινης σφαίρας και τέμνει συνεχώς τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία. Χαρακτηριστικό της είναι ότι ανέρχεται σπειροειδώς σε υψηλότερα πλάτη, χωρίς ποτέ να φθάνει στους πόλους, γιατί παραμένει ασύμπτωτη σε αυτούς. Θεωρητικά έχει αποδειχθεί ότι μεταξύ δυο σημείων της γης διέρχονται άπειρες λοξοδρομίες. Εκείνη όμως που ενδιαφέρει το ναυτιλλόμενο είναι αυτή που ενώνει τα σημεία απευθείας χωρις να περιστρέφεται γύρω από τη γη. Ο ισημερινός και οι μεσημβρινοί είναι μέγιστοι κύκλοι ορθοδρομίες, αλλά μπορούν να θεωρηθούν ως ειδικές περιπτώσεις λοξοδρομιών. Η απόσταση δυο τόπων που μετράται πάνω στη λοξοδρομική καμπύλη αποτελεί τη **λοξοδρομική απόσταση** των τόπων αυτών. Η σταθερή γωνία με την οποία τέμνονται οι μεσημβρινοί από τη καμπύλη αυτή αποτελεί τη **λοξοδρομική ή μερκατορική πορεία**. Πλέοντας κατά παράλληλο και σε υψηλά πλάτη η διαφορά μεταξύ ορθοδρομίας και λοξοδρομίας μεγιστοποιείται.

3.4 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΟΡΘΟΔΡΟΜΙΚΗΣ ΑΠΟΣΤΑΣΗΣ ΚΑΙ ΑΡΧΙΚΗΣ ΠΛΕΥΣΗΣ.

Έστω δυο τόποι στη γη Α, Β όπου Α το σημείο εκκινήσεως με συντεταγμένες $φ_ε$ και $λ_ε$ και Β το σημείο αφίξεως με συντεταγμένες $φ_α$ και $λ_α$. Αν θέλουμε να υπολογίσουμε την ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β καθώς και την αρχική πλεύση $Ζ_{λε}$, στο σχηματιζόμενο τρίγωνο ΠΑΒ ορθοδρομίας γνωρίζουμε:
α) τη πλευρά ΠΑ ίση με $90 – φ_ε$.
β) τη πλευρά ΠΒ ίση με 90 +/- $φ_α$ (+ αν $φ_α$, $φ_ε$ είναι ετερώνυμα και – αν $φ_α$, $φ_ε$ είναι ομώνυμα).
γ) τη γωνία Δλ ίση με τη διαφορά μήκους των δυο τόπων.
Αφού γνωρίζουμε δυο πλευρές και τη περιεχομένη γωνία επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ υπολογίζουμε τα ζητούμενα στοιχεία.





3.5 ΚΟΡΥΦΑΙΟ ΣΗΜΕΙΟ ΟΡΘΟΔΡΟΜΙΑΣ (VERTEX)

Έστω το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠΑΒ του σχήματος. Αν θεωρήσουμε το μέγιστο κύκλο ΠΚΠ΄, που διέρχεται από τον πόλο Π και είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο ΑΒ, το σημείο τομής Κ ονομάζεται **κορυφαίο** (vertex) του ορθοδρομικού τόξου. Το σημείο Κ απέχει τη μικρότερη απόσταση ΠΚ από τον πόλο Π άρα τη μεγαλύτερη απόσταση ΚΡ από τον ισημερινό. Επομένως από όλα τα σημεία του ορθοδρομικού τόξου, το Κ έχει το μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος. Ανάλογα βέβαια με το άνοιγμα των γωνιών Α, Β μπορεί το Κ να βρίσκεται και στη προέκταση του ΑΒ.
Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του κορυφαίου σημείου Κ της ορθοδρομίας είναι πολύ χρήσιμος για των υπολογισμό των συντεταγμένων των ενδιάμεσων σημείων, ώστε να χαράξουμε το ορθοδρομικό τόξο.
Επειδή ο μεσημβρινός ΠΚΠ΄ είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο, το σφαιρικό τρίγωνο ΠΚΑ είναι ορθογώνιο. Του τριγώνου αυτού γνωρίζουμε τη πλευρά $ΠΑ = 90^0 – φ_ε$ και τη γωνία Α = ζ(αρχική πλεύση). Αν το επιλύσουμε, υπολογίζουμε τη πλευρά ΠΚ και τη γωνία ΑΠΚ, που ισούται με τη διαφορά μήκους $Δλ_κ$ μεταξύ του σημείου εκκινήσεως Α και του κορυφαίου Κ.
Επομένως αν αφαιρέσουμε από 90^0 τη πλευρά ΠΚ βρίσκουμε το πλάτος $φ_κ$ του κορυφαίου, ενώ αν προσθέσουμε (ή αφαιρέσουμε) στο μήκος $λ_ε$ του σημείο εκκινήσεως τη $Δλ_κ$,βρίσκουμε το μήκος $λ_κ$ του κορυφαίου.

Κεφάλαιο 4^o

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $1^η$

Πλοίο πρόκειται να πλεύσει από στίγμα $φ = 31^o\ 15'$ Β, $λ = 130^o\ 52'$ Α προς στίγμα $φ = 12^0$ $28'$Β, $λ = 32^0\ 19'$Α.Να βρεθούν η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πλεύση.

$α = 90^o - φα = 90^o\ 00' - 12^o\ 28' = 77^o\ 32'$
$β = 90^o - φε = 90^o\ 00' - 31^o\ 15' = 58^o\ 45'$
$Δλ = |λε - λα| = 130^o\ 52' - 32^o\ 19' = 98^o\ 33'$
$α - β = 77^o\ 32' - 58^o\ 45' = 18^o\ 47'$
Ισχύει ότι ημπργ = ημπρ(α-β) + ημαημβμπρΓ
Θέτω:
ημπρΚ= ημαημβημπρΓ →log ημπρΚ=log ημαημβημπρΓ=logημα+logημβ+logημπρΓ=
$=\log(77^o\ 32')+\log(58^o\ 45')+ημπρ(98^o\ 33')=9{,}98964+9{,}93192+9{,}75917=29{,}68073$
(-20)=9,68073 → (Natural Haversines) 0,47943[1]

[1] Παρεμβολή:

↓←	**13**	→↓
9,68066	9,68073	9,68079
↑← **7**→↑		
0,47935	X	0,47950
↑←	**15**	→↑

Για d=13→15
Για d=7 →X X=8 Οπότε ημπρΚ=0,47935+0,00008=0,47943

Επιστρέφουμε στην αρχική σχέση:
ημπργ = ημπρ(α-β) + ημαημβμπρΓ= ημπρ(α-β) +ημπρΚ= ημπρ(18^o 47)' +ημπρΚ=
0,02663+0,47943=0,50606
Άρα ημπργ =0,50606[2]

[2] Παρεμβολή:

↓←	15	→↓
0,50596	0,50606	0,50611
↑←	10	→↑
$90^o\ 41'$	X	$90^o\ 42'$
↑←	1'	→↑

Για d=15 → 1'
Για d=10 → X X=0,667

Οπότε $γ = 90^o\ 41{,}667'$
Η ορθοδρομική απόσταση είναι:90^o X60' +41,667'=5400+41,667= 5441,667 ν. μ.

Για την αρχική πλεύση:

τ=(α+β+γ)/2= (77º 32’+58º 45’+90º 41,6’)/2=113º 29,3’
τ-β=113º 29,3’ - 58º 45’= 54º 44,3’
τ-γ=113º 29,3’ - 90º 41,7’= 22º 47,6’

ημπρA=ημ(τ-β)ημ(τ-γ)στεμβστεμγ → log ημπρA= log ημ(τ-β)ημ(τ-γ)στεμβστεμγ=
log ημ(τ-β)+log ημ(τ-γ)+ log στεμβ+log στεμγ=
log ημ(54º 44,3’)+ log ημ (22º 47,6) +log στεμ (58º 45’) +log στεμ (90º 41,6’)=
= 9,91197[1]+ 9,58820[2]+ 10,06808 + 10,00003=39,56828(-30)=9,56828[3]

Προκύπτει ότι η αρχική πλεύση είναι 74º 56,25’

[1] Παρεμβολή:

↓← 1’ →↓
54º 44’ 54º 44,3 54º 45’
9,91194 X 9,91203
↑← 9 →↑
Για d=1’ → 9
Για d=0,3 → X X=2,7≈3

[2] Παρεμβολή:

↓← 1’ →↓
22º 47’ 22º 47,7 22º 48’
9,58799 X 9,58829
↑← 30 →↑
Για d=1’ → 30
Για d=0,7 → X X=21

[3] Παρεμβολή:
↓← 16 →↓
9,56824 9,56828 9,56840
↑← 4 →↑
74º 56’ X 74º 57
↑← 1’ →↑
Για d=16 → 4
Για d=1΄’ → X X=0,25

Για d=0,7 → X X=21

<u>ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η</u>

Πλοίο πρόκειται να πλεύσει από στίγμα φ = 58ο 58' Ν, λ =90ο 30' Α προς στίγμα φ = 76^0 16΄Ν, λ =120^0 15΄Δ.Να βρεθεί η ορθοδρομική απόσταση.

α=90ο –φα= 90ο 00'- 58ο 58'= 31ο 02'
β=90ο –φε = 90ο 00'- 76ο 16'= 13ο 44'
Δλ=|λε-λα|=120ο 15'- 090ο 30'=29ο 45'
α-β=31ο 02'– 13ο 44' = 17ο 18'
Ισχύει ότι ημπργ = ημπρ(α-β) + ημαημβμπρΓ
Θέτω:
ημπρΚ= ημαημβημπρΓ →log ημπρΚ=log ημαημβημπρΓ=logημα+logημβ+logημπρΓ=
=log(31ο 02')+log(13ο 44')+ημπρ(29ο 45')=9,71226+9,37549+8,81889=27,90664
(-20)=7,90664→ (Natural Haversines) 0,03068[1]

Άρα προκύπτει ότι γ=20ο 10,8' 20X60' +10,8=1210,8ν.μ.

[1] Παρεμβολή:

↓ ← **140** → ↓
7,90620 7,90664 7,90760
↑ ← **44** → ↑
0,00806 X 0,00808
↑ ← **2** → ↑
Για d=140→2
Για d=44 →X X=1 Οπότε ημπρΚ=0,00806+0,00001=0,00807

Επιστρέφουμε στην αρχική σχέση:
ημπργ = ημπρ(α-β) + ημαημβμπρΓ= ημπρ(α-β) +ημπρΚ= ημπρ(17ο 18') +ημπρΚ=
0,02262+0,00807=0,03069
Άρα ημπργ =0,50606[2]

[2]Παρεμβολή:

↓ ← **5** → ↓
0,03065 0,03069 0,03070
↑ ← **4** → ↑
10' X 11'
↑ ← **1'** → ↑
Για d=5→1'
Για d=4 →X X0,8'

Κεφάλαιο 5ο

5.1.Αστρονομία- Ορισμός

Η Αστρονομία είναι η φυσική επιστήμη που ερευνά όλα τα ουράνια σώματα (όπως άστρα, γαλαξίες, νεφελώματα, πλανήτες, δορυφόροι, αστεροειδείς, κομήτες και άλλα), τη Φυσική, τη Χημεία, την προέλευση και την εξέλιξη τέτοιων αντικειμένων, τα φαινόμενα που συμβαίνουν στον χώρο έξω από την ατμόσφαιρα της Γης, τα οποία συμπεριλαμβάνουν εκρήξεις υπερκαινοφανών αστέρων, εκλάμψεις ακτίνων γ και κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων υποβάθρου. Είναι μία από τις αρχαιότερες επιστήμες καθώς γεννήθηκε με την εμφάνιση του «διανοούμενου ανθρώπου» στον ημέτερο πλανήτη. Οι προϊστορικοί πολιτισμοί και οι πρώτοι ιστορικοί πολιτισμοί άφησαν αστρονομικά τεχνουργήματα, όπως αυτά που άφησαν οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι, οι Νούβιοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Αρχαίοι Έλληνες, οι Αρχαίοι Κινέζοι, οι Αρχαίοι Ινδοί, οι Αρχαίοι Ιρανοί και οι Μάγιας, που δείχνουν ότι ασχολούνταν με μεθοδικές παρατηρήσεις του νυκτερινού ουρανού. Ειδικότερα, όμως, για τους Αρχαίους Έλληνες, η «Αστρονομία» γεννήθηκε ακριβώς την ίδια εκείνη στιγμή που γεννήθηκε και η ελληνική μυθολογία. Ωστόσο, πρακτικά απαιτούνταν η εφεύρεση και η εξέλιξη του τηλεσκοπίου, ώστε η Αστρονομία να μπορέσει να εξελιχθεί σε σύγχρονη επιστήμη. Ιστορικά, η Αστρονομία συμπεριλάμβανε ενασχολήσεις όπως η Αστρομετρία, η Αστρονομική Ναυτιλία, η Παρατηρησιακή Αστρονομία, ο σχεδιασμός ημερολογίων και η Αστρολογία, ενώ στις μέρες μας η επαγγελματική Αστρονομία συχνά θεωρείται συνώνυμη με την Αστροφυσική.

Κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, το πεδίο της επαγγελματικής αστρονομίας διαχωρίστηκε σε δύο (2) μεγάλους κλάδους:

1. Στην **Πρακτική Αστρονομία** ή **Παρατηρησιακή Αστρονομία** (ή απλά Αστρονομία) η οποία και πραγματεύεται τις αστρονομικές παρατηρήσεις, για την άμεση λήψη αστρονομικών δεδομένων, με τα όργανα και τις μεθόδους που εκτελούνται αυτές οι αστρονομικές παρατηρήσεις, καθώς και κάποιους βασικοί υπολογισμούς με βάση τα δεδομένα που λήφθηκαν, από αυτές τις αστρονομικές παρατηρήσεις.
2. Στη **Θεωρητική Αστρονομία** που εστιάζει στην ανάπτυξη αναλυτικών ή και υπολογιστικών μοντέλων για την περιγραφή των αστρονομικών αντικειμένων και τα φαινόμενα που σχετίζονται με αυτά.

Οι δυο αυτοί κύριοι κλάδοι είναι συμπληρωματικοί μεταξύ τους, με τη Θεωρητική Αστρονομία να αναζητά τρόπους για να εξηγήσει τα παρατηρούμενα δεδομένα, αλλά και αντιστρόφως, η Παρατηρισιακή Αστρονομία ψάχνει δεδομένα για να επιβεβαιώσει τα κείμενα θεωρητικά συμπεράσματα. Οι Αστρονομία είναι μια από τις λίγες επιστήμες στις οποίες ερασιτέχνες μπορούν ακόμη να παίζουν ενεργό λόγο: Ιδιαίτερα στην ανακάλυψη και στην παρατήρηση μεταβατικών φαινομένων, όπως τα μεταβλητά αστέρια ή οι κομήτες, ερασιτέχνες αστρονόμοι έχουν συνεισφέρει πολλές και σημαντικές αστρονομικές ανακαλύψεις.

Ορισμοί της αστρονομίας:

Άξονας του κόσμου(celestial axis) είναι η προέκταση του άξονα της γης, που συμπίπτει και με τον άξονα της ουράνιας σφαίρας. Ο άξονας του κόσμου συναντάει την ουράνια σφαίρα σε δυο αντιδιαμετρικά στοιχεία, αντίστοιχα των γεωγραφικών, τα οποία ονομάζονται **ουράνιοι πόλοι**(celestial poles). Ο πλησιέστερος προς τον πολικό αστέρα ονομάζεται **βόρειος πόλος** και ο άλλος, ο πλησιέστερος προς τον αστερισμό του νότιου σταυρού, **νότιος πόλος.**

Ουράνιος Ισημερινός: Είναι ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που προκύπτει από την τομή της με το επίπεδο του ισημερινού της γης.

Ουράνιοι Μεσημβρινοί: Είναι οι προεκτάσεις των μεσημβρινών της γης που διέρχονται από τους ουράνιους πόλους.

Ωρικοί κύκλοι: Είναι οι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας που έχουν διάμετρο τον άξονα του κόσμου.

Ωρική γωνία: Είναι η γωνία μεταξύ του ωρικό κύκλο του αστέρα και του μεσημβρινού που βρίσκεται ο παρατηρητής

5.2 ΟΥΡΑΝΙΑ ΣΦΑΙΡΑ.

Λόγω των τεραστίων διαστάσεων του σύμπαντος, οι διαστάσεις της γης εκμηδενίζονται. Άρα για την εξήγηση ορισμένων φαινόμενων και την επίλυση των προβλημάτων της αστρονομικής ναυσιπλοΐας, θεωρούμε τη γη σα το κέντρο μιας φανταστικής σφαίρας, η οποία ονομάζεται **ουράνια σφαίρα**(celestial sphere). Η ουράνια σφαίρα είναι ομόκεντρη με τη γήινη και περικλείει όλα τα ουράνια σώματα, που βρίσκονται σε απομακρυσμένες αποστάσεις από το κέντρο της γης. Αν θεωρήσουμε ότι και το μάτι του παρατηρητή βρίσκεται στο κέντρο της ουράνιας σφαίρας και προβάλλουμε τα αστέρια στην εσωτερική επιφάνεια της, θα έχουμε τα ίχνη των αστέρων. Το ορατό μέρος της ουράνιας σφαίρας ονομάζεται ουρανός.

Ορίζοντας:
Ορίζοντας ονομάζεται κάθε επίπεδο κάθετο προς τη γραμμή της κατακορύφου, δηλαδή κάθετο προς την κατεύθυνση της βαρύτητας όπου σε κάθε σημείο υλοποιείται με το νήμα της στάθμης. Η προέκταση της κατακορύφου τέμνει την ουράνια σφαίρα σε 2 σημεία. Το ζενίθ και το ναδίρ.

Είδη ορίζοντα:

Α)Μαθηματικός, ουράνιος ή αληθής: Είναι ο ορίζοντας που διέρχεται από το κοινό σημείο γήινης και ουράνιας σφαίρας και τέμνει την ουράνια σφαίρα κατά μέγιστο κύκλο. Χωρίζει την γη σε 2 ημισφαίρια.
Β) Ορατός: Είναι ο ορίζοντας που βλέπει και αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής γύρω του για να κάνει αστρονομικές παρατηρήσεις.
Γ)Αισθητός: Το επίπεδο κάθετο προς την κατακόρυφο που διέρχεται κάτω από την επιφάνεια της θάλασσας ονομάζεται αισθητός ορίζοντας.
Δ)Γεωμετρικός: Είναι ο κώνος που σχηματίζεται από τις εφαπτόμενες ακτίνες στην επιφάνεια της γης, κάτω από το μάτι του παρατηρητή.

5.3 ΟΥΡΑΝΙΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

Για τον προσδιορισμό των θέσεων των ιχνών των αστέρων πάνω στην ουράνια σφαίρα χρησιμοποιούμε δυο συστήματα συντεταγμένων. Το σύστημα των ισημερινών και το σύστημα των οριζόντιων συντεταγμένων.
Ισημερινές συντεταγμένες: Οι Ουράνιες συντεταγμένες, ή ουρανογραφικές συντεταγμένες, είναι εκείνες που προσδιορίζουν το ίχνος (τη θέση) ενός ουρανίου σώματος στην ουράνια σφαίρα. Είναι αντίστοιχες με τις γεωγραφικές συντεταγμένες ενός τόπου στην επιφάνεια της Γήινης σφαίρας. Το σύστημα των συντεταγμένων αυτών βασίζεται στον ουράνιο ισημερινό και για αυτό το λόγο ονομάζονται επίσης και ισημερινές συντεταγμένες. Η πρώτη εκ των δύο είναι **κλίση ή απόκλιση** δ (declination). Μετριέται σε μοίρες, λαμβάνει τιμές από 0 έως 90 και χαρακτηρίζεται Β(βόρεια) ή Ν(νότια). Αντίστοιχη συντεταγμένη της κλίσης αποτελεί το γεωγραφικό πλάτος στην γήινη σφαίρα. Η δεύτερη ισημερινή συντεταγμένη είναι η **αστρική ωρική γωνία** SHA(siderial hour angle). Μετριέται επίσης σε μοίρες από 0 έως 360. Είναι το τόξο του ουράνιου Ισημερινού από το Aries(εαρινό ισημερινό σημείο) μέχρι τον ωρικό κύκλο του αστέρα προς παρατήρηση. Το Aries είναι το σημείο τομής της εκλειπτικής και του ισημερινού

Οριζόντιες συντεταγμένες: Εξαιτίας της συνεχώς μεταβαλλόμενης θέσης του παρατηρητή λόγω της κίνησης του πλοίου δεν μπορεί να γίνει ακριβής προσδιορισμός της θέσης των ουράνιων σωμάτων με τις ισημερινές συντεταγμένες. Γι’ αυτόν ακριβώς τον λόγο χρησιμοποιούνται και οι οριζόντιες συντεταγμένες οι οποίες είναι το **αληθές ύψος** Ηλ και το **αληθές αζιμούθ** Αζλ. Ως βάση των συντεταγμένων αυτών λαμβάνεται ο μαθηματικός ορίζοντας. Ως αληθές ύψος χαρακτηρίζεται το τόξο κάθετου κύκλου από το σημείο αναφοράς που είναι ο μαθηματικός ορίζοντας μέχρι το αστέρι παρατήρησης. Παρουσιάζει τιμές από 0-90 μοίρες. Είναι θετικό για τα αστέρια του ορατού ορίζοντα και αρνητικό για τον αόρατο ορίζοντα. Το αληθές αζιμούθ αποτελεί τόξο του μαθηματικού ορίζοντα από τον βορρά έως τον κάθετο κύκλο του αστέρα. Μετριέται σε ολοκυκλικό, ημικυκλικό ή τεταρτοκυκλικό.

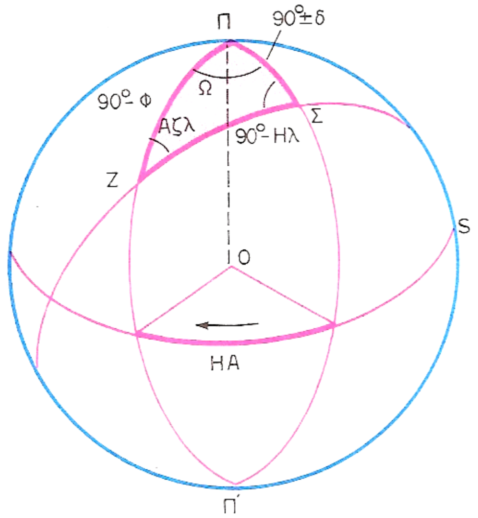
5.4 ΤΡΙΓΩΝΟ ΘΕΣΕΩΣ Ή ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΚΟ ΤΡΙΓΩΝΟ.

Αν θεωρήσουμε επάνω στην ουράνια σφαίρα το σφαιρικό τρίγωνο που σχηματίζεται με κορυφές: α) το **ζενίθ** του παρατηρητή

β) τον **άνω πόλο** του παρατηρητή

γ) τη **θέση ενός αστέρα** στην ουράνια σφαίρα,

τότε το σφαιρικό αυτό τρίγωνο λέγεται τρίγωνο θέσεως.



Τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσεως είναι:

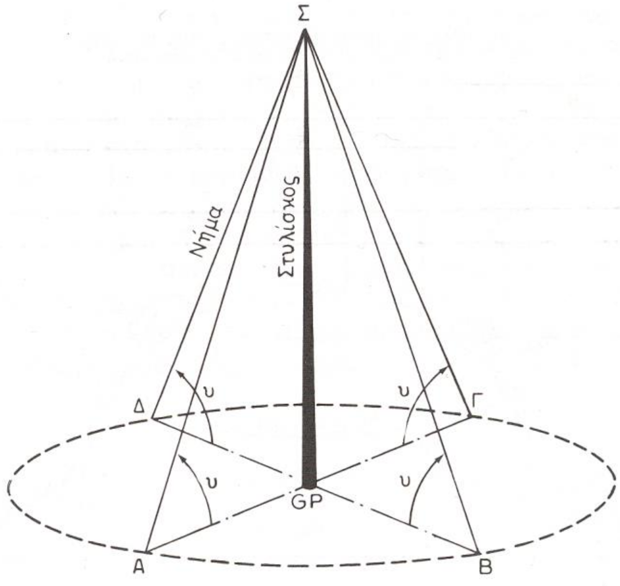
1)Πλευρές του σφαιρικού τριγώνου:
Α) η ΠΖ που καλείται **πολοζενιθιακή απόσταση** και μετράει την απόσταση του τόπου, επάνω στον μεσημβρινό, από τον άνω πόλο. Ισούται με το σύμπλατος $90^o - φ$.
Β) η ΠΣ καλείται **πολική απόσταση** και μετράει την απόσταση του αστέρα επάνω στον ωρικό κύκλο, από τον άνω πόλο. Είναι $P = 90^o$ +/- δ(+ για ετερώνυμα φ, δ και – για ομώνυμα φ, δ).
Γ) η ΖΣ που καλείται **ζενιθιακή απόσταση** Ζλ, που μετράει την απόσταση του αστέρα από το ζενίθ επάνω στον κάθετο κύκλο του αστεριού. Δηλαδή είναι η γωνιακή απόσταση του πλοίου (σε μοίρες) επάνω στη γη από τη γήινη προβολή του αστεριού. Αποτελεί το συμπλήρωμα του ύψους . ($Ζλ+Ηλ=90^o$ ή $Ζλ= 90^o – Ηλ$)
2)Γωνίες του σφαιρικού τριγώνου:
- Α)Η γωνία Ζ που ονομάζεται αζιμούθ του αστέρα.
- Β)Η γωνία Σ που έχει κορυφή τον αστέρα και ονομάζεται παραλλακτική γωνία
- Γ)Η γωνία Ω με κορυφή τον αντίστοιχο πόλο και ονομάζεται ωρική γωνία του Αστέρα.

Τα επιλυόμενα κύρια προβλήματα της Αστρονομικής Ναυτιλίας που ανάγονται στο τρίγωνο θέσεως είναι συνήθως τριών ειδών:

α)Εύρεση ευθείας θέσεως: όπου με δεδομένα το πλάτος (**φ**), τη κλίση (**δ**) και την ωρική γωνία (**HA**) ζητείται ή εύρεση του ύψους (**Ηλ**) και το αζιμούθ των αστέρων (**Αζλ**).
β) Αναγνώριση αστέρα: όπου με δεδομένα το πλάτος (**φ**), το ύψος (**Ηλ**) και το αζιμούθ (**Αζλ**) ζητείται ή εύρεση της κλίσεως (**δ**) και της ωρικής γωνίας (**ΗΑ**), και
γ) Εύρεση παραλλαγής: όπου με δεδομένα την ωρική γωνία (**ΗΑ**), την κλίση (**δ**) και το ύψος του αστέρα (**Ηλ**) ζητείται η εύρεση του Αζιμούθ (**Αζλ**) του αστέρα.

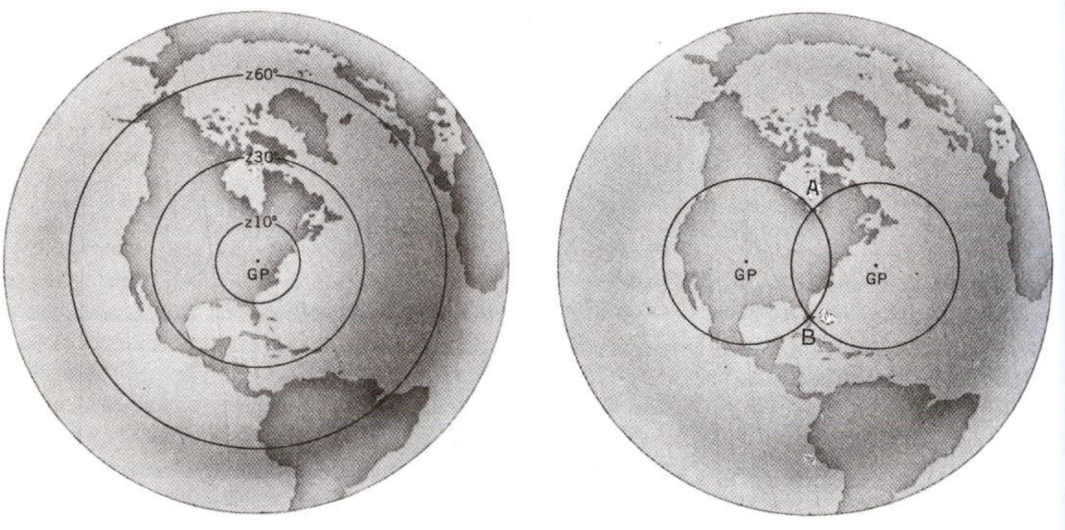
5.5 ΕΥΘΕΙΑ ΘΕΣΕΩΣ.

Όπως φαίνεται στο σχήμα ένας στυλίσκος κατακόρυφος Σ στηρίζεται στο έδαφος στο σημείο GP. Παίρνουμε τέσσερα νήματα με το ίδιο μήκος , αλλά λίγο μεγαλύτερο από το μήκος του στυλίσκου. Τη μια άκρη κάθε νήματος στερεώνουμε στη κορυφή Σ και την άλλη την εφάπτουμε με τεντωμένο το νήμα σε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ. Τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα είναι μεταξύ τους ίσα. Έτσι οι αντίστοιχες γωνίες θα είναι Α = Β = Γ = Δ. Δηλαδή τα σημεία αυτά έχουν μια κοινή ιδιότητα, την ίση γωνία υπό την οποία βλέπουν τον στυλίσκο Σ, και την ίση απόσταση αυτών από το σημείο GP. Αυτό σημαίνει ότι τα σημεία Α, Β, Γ, Δ βρίσκονται σε περιφέρεια κύκλου, από τα σημεία της οποίας μετρούμε τη κορυφή Σ με την ίδια γωνία u.



Μεταφέροντας το παράδειγμα στη πραγματικότητα έχουμε αντί της κορυφής του στυλίσκου Σ ένα αστέρι που βρίσκεται σε άπειρη απόσταση. Σε ορισμένη χρονική στιγμή η γήινη προβολή του αστεριού είναι GP. Αν ενώσουμε επάνω στη γη όλα τα σημεία που κατά την ίδια χρονική στιγμή GMT μετρούν το ίδιο ύψος (ή ίδια ζενιθιακή απόσταση) προκύπτει ένας κύκλος που ονομάζεται **κύκλος ύψους** (circle of equal altitude).
Έστω ότι τρεις κύκλους ύψους, οι οποίοι γράφονται με κέντρο την GP ενός αστεριού (κοντά στην πρωτεύουσα Washington των ΗΠΑ) και ακτίνες τις ζενιθιακές αποστάσεις 10^o, 30^o, 60^o που αντιστοιχούν στα ύψη του αστεριού 80^o, 60^o, 30^o.

Οι ακτίνες αυτές αντιπροσωπεύουν 10 • 60΄ = 600 ν.μ, 30 • 60΄ = 1800 ν.μ και 60 • 60΄ = 3600 ν.μ επάνω στη γη. Αν αντί ενός αστεριού παρατηρούσαμε ταυτόχρονα με τον εξάντα τα ύψη δυο αστεριών, θα είχαμε δυο διαφορετικούς κύκλους ύψους. Για την χάραξη των κύκλων αυτών στη γήινη σφαίρα, θα πρέπει να υποτυπώσουμε χωριστά κάθε γεωγραφική προβολή των αστεριών και με ακτίνες τις αντίστοιχες ζενιθιακές αποστάσεις να γράψουμε περιφέρειες κύκλων. Παρατηρούμε ότι οι δυο αυτοί κύκλοι τέμνονται μεταξύ τους σε δυο σημεία Α,Β. τα σημεία τομής αποτελούν κοινό γεωμετρικό τόπο των δυο περιφερειών και για το λόγο αυτό σε ένα από αυτά τα σημεία τομής βρίσκεται το πλοίο. Εννοείται το πλοίο θα βρίσκεται στο σημείο που είναι πλησιέστερα στο στίγμα αναμετρήσεως. Όπως φαίνεται στο σχήμα το αστρονομικό στίγμα βρίσκεται στο σημείο Β.



Είναι φανερό ότι για να έχουμε αστρονομικό στίγμα με την επιζητούμενη ακρίβεια αναπτύγματος του ενός μιλίου σε γραμμικό μήκος ενός χιλιοστού, θα έπρεπε να έχουμε στο πλοίο ένα ομοίωμα της γήινης σφαίρας με διάμετρο 6,9m (περιφέρεια ισημερινού 360^o • 60΄ = 21600΄ = 21600 mm = 21,6m. Ισχύει ότι περιφέρεια = διάμετρος • 3,14 → διάμετρος = 21,6m/3,14 = 6,9m).

Πρακτικά η χάραξη ενός κύκλου ύψους σε ένα ογκώδες ομοίωμα σφαίρας, όπως το περιγράψαμε, είναι αδύνατη. Η δυσκολία αυτή οδήγησε στη σκέψη να χαραχθεί ο κύκλος ύψους στο ναυτικό χάρτη. Αυτό όμως παρουσίασε δυο βασικά προβλήματα. Το ένα είναι η πολύ μεγάλη απόσταση της γήινης προβολής από το πλοίο, αφού αυτή απέχει δεκάδες μοίρες. Συνέπεια αυτού είναι να χρησιμοποιείται χάρτης πολύ μικρής κλίμακας για να καταλαμβάνει εκτεταμένες επιφάνειες γης. Όμως ένας τέτοιος χάρτης θα έχει γραμμικό μήκος μιλίου πολύ μικρό για την επιζητούμενη ακρίβεια. Το δεύτερο πρόβλημα είναι η αναπόφευκτη παραμόρφωση του κύκλου ύψους λόγω των αυξομερών πλατών. Κατά συνέπεια η αναπαράσταση ενός κύκλου ύψους στο μερκατορικό χάρτη αποτελεί **καμπύλη ύψους**.

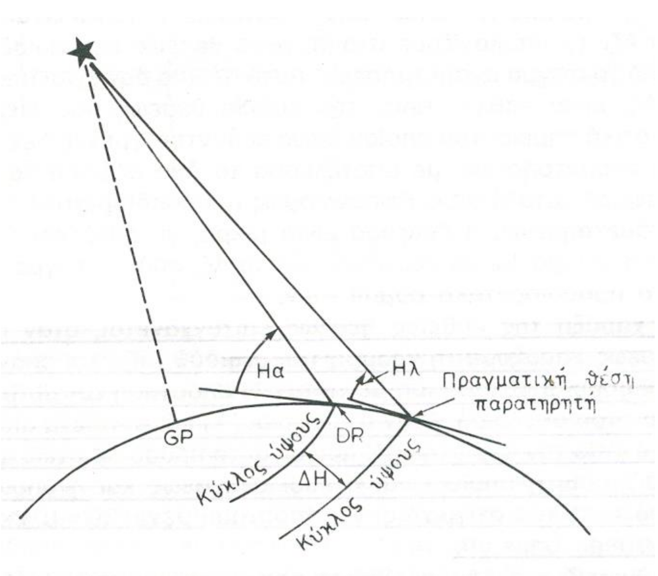
Εφόσον ο ναυτιλλόμενος ενδιαφέρεται για μικρή περιοχή περί το στίγμα αναμετρήσεως, δεν απαιτείται η χάραξη ολόκληρης της καμπύλης, αλλά μικρού μόνο τμήματός της εκατέρωθεν του στίγματος αναμετρήσεως.

Αποδεικνύεται ότι τμήμα της καμπύλης ύψους που κείται 500 μίλια εκατέρωθεν τυχόντος σημείου της, συμπίπτει με κύκλο ο οποίος ονομάζεται **εγγύτατος κύκλος**. Η αντικατάσταση της πραγματικής καμπύλης ύψους στο ναυτικό χάρτη με τον εγγύτατο κύκλο, υπερκαλύπτει τις ανάγκες της ναυσιπλοΐας.

Επειδή μικρό τμήμα του εγγύτατου κύκλου παρουσιάζει ελάχιστη καμπυλότητα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον εγγύτατο κύκλο με την εφαπτόμενη προς αυτόν ευθεία στο κοινό του σημείο με τη καμπύλη ύψους. Η εφαπτόμενη αυτή ευθεία, η οποία αντιπροσωπεύει το γεωμετρικό τόπο του στίγματος του πλοίου για τη γειτονική περιοχή του πλου, ονομάζεται **ευθεία θέσεως**(line of position). Αποδεικνύεται ότι για πλάτη μέχρι 65^o και παρατηρούμενα ύψη 80^o η ευθεία θέσεως δεν πρέπει να υπερβαίνει τα 30 ν.μ εκατέρωθεν του κοινού σημείου επαφής, για την επιζητούμενη ακρίβεια του ενός ναυτικού μιλίου.
Η χάραξη μιας ευθείας θέσεως γινόταν παλιότερα με τη μέθοδο μήκους ή Lalande και μέθοδος πλάτους ή Borda οι οποίες δε χρησιμοποιούνται σήμερα.

5.5.1 <u>ΜΕΘΟΔΟΣ MARCQ.</u>

Η μέθοδος Marcq αποτελεί τη βάση στην πρακτική της σύγχρονης αστρονομικής ναυτιλίας. Ο Marcq χρησιμοποίησε σαν προσδιοριστικό σημείο της ευθείας θέσεως το σημείο τομής του κύκλου ύψους με τον μέγιστο κύκλο , που ενώνει την γήινη προβολή GP του ουράνιου σώματος με το στίγμα αναμετρήσεως DR.

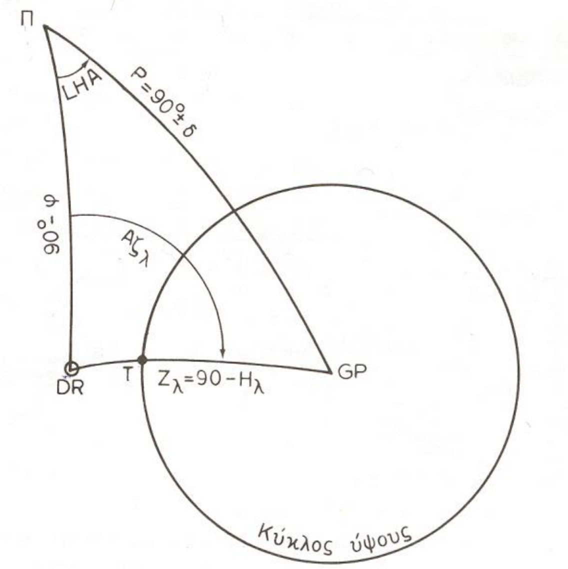


Έχουμε τον κύκλο ύψους παρατηρήσεως με κέντρο τη γήινη προβολή του αστεριού GP και ακτίνα Ζλ(90^o – Ηλ), όπου Ηλ είναι το αληθές ύψος που μετρήσαμε με τον εξάντα σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Ενώνουμε το DR με τη GP, με τη συντομότερη γραμμή, η οποία επάνω στη γη αποτελεί τόξο μέγιστου κύκλου. Το σημείο στο οποίο τέμνει τον κύκλο ύψους αποτελεί το προσδιοριστικό σημείο.
Στη μέθοδο Marcq επιλύουμε το τρίγωνο θέσεως, του οποίου κορυφές είναι ο επάνω πόλος Π του παρατηρητή, η γήινη προβολή GP και το στίγμα αναμετρήσεως DR, το οποίο υποθέτουμε ότι είναι το πλησιέστερο προς το πραγματικό στίγμα του πλοίου. Όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα μπορούμε να υπολογίσουμε τη ζενιθιακή απόσταση Ζα(υπολογισμού) που είναι ίση με DR–GP, ενώ είναι γνωστές οι πλευρές Π-DR = 90^o – φ , Π- GP = 90^o -/+ δ και LHA = Π.

Από τύπους ημιπαρημιτόνων πλευρών:

ημπρα = ημπρ(β – γ) + ημβημγημπρΑ άρα ανάλογα ισχύει :

ημπρΖα = ημπρ[(90º +/- δ) – (90º – φ)] + ημ(90º – φ)ημ(90 -/+ δ)ημπρLHA



ημπρΖα = ημπρ(φ +/- δ) + συνφσυνδημπρLHA, όπου(φ+δ) για ετερώνυμα και (φ ~ δ) για ομώνυμα.
Στη πράξη συμβαίνει κατά κανόνα να μη συμπίπτει το ακριβές στίγμα με το στίγμα αναμετρήσεως. Έτσι η Ζα είναι διαφορετική συνήθως από τη Ζλ. Η διαφορά αυτή σε πρώτα μοίρας δίνει την απόσταση του προσδιοριστικού της ΕΘ από το DR. Δηλαδή στο σχήμα έχουμε (GP-DR) ~ (GP-T) = Ζλ ~ Ζα, η διαφορά των ζενιθιακών αποστάσεων(από τη μεγαλύτερη αφαιρούμε τη μικρότερη). Αντί αυτής όμως μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την αριθμητική διαφορά των αντίστοιχων υψών. Δηλαδή **ΔΗ = Ηλ ~ Ηα**. Η ΔΗ χαρακτηρίζεται ως **θετική/+/towards/προς το αζιμούθ** του αστεριού (νοούμενου από το στίγμα αναμετρήσεως), αν το Ηλ είναι μεγαλύτερο από το Ηα και ως **αρνητική/-/away/αντίθετα από το αζιμούθ**(-/+ 180º) του αστεριού.
Ο υπολογισμός του αζιμούθ μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας τον τύπο:

ημπρΒ = [ημπρβ ~ ημπρ(γ ~ α)]στεμαστεμγ

στο αστρονομικό τρίγωνο ως προς Αζλ προκύπτει:

ημπρΑζλ=[ημπρ(90º-/+δ)~ημπρ((90º–φ)–(90º–Ηλ))]στεμ(90º–Ηλ)στεμ(90º- φ)

ημπρΑζλ= [ημπρΡ ~ ημπρ(φ~ Ηλ)]τεμΗλτεμφ
ή πιο απλούστερα από τύπο ημιτόνων(σελίδα 16):

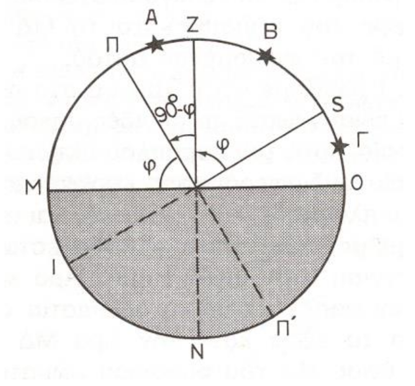
$$\frac{ημα}{ημΑ} = \frac{ημβ}{ημΒ} = \frac{ημγ}{ημΓ}$$

ημΑζλ/ημ(90º -/+ δ) = ημLHA/ημ(90º – Ηλ) →
ημΑζλ = συνδημLHA/συνΗλ

αφού η ζενιθιακή απόσταση πάνω στη γη είναι κάθετη στο κύκλο ύψους στο σημείο τομής, η κατεύθυνση του αζιμούθ είναι κάθετη στην εφαπτόμενη.

5.6 <u>ΜΕΣΗΜΒΡΙΝΟ ΠΛΑΤΟΣ.</u>

Το ύψος ενός ουράνιου σώματος κατά τη μεσημβρινή διάβαση αποτελεί ειδική περίπτωση κατά την οποία η ωρική γωνία και το αζιμούθ είναι 0^o ή 180^o. Το τρίγωνο θέσεως εκφυλλίζεται σε μία του πλευρά και ο άνω πόλος, το ίχνος του αστεριού και το ζενίθ κείνται πάνω στον ίδιο μέγιστο κύκλο, ο οποίος είναι ο μεσημβρινός του παρατηρητή. Έτσι η μεσημβρινή παρατήρηση αποκτά ιδιαίτερη σημασία, διότι η ευθεία θέσεως που προκύπτει, διήκει κατά παράλληλο, δίνοντας έτσι το πλάτος.
Η τριγωνομετρική σχέση ημπρZ = ημπρ(φ +/- δ) + ημπρLHAσυνφσυνδ για LHA = 0^o ή 180^o απλοποιείται και γίνεται ημπρZ = ημπρ(φ +/- δ) ή Z = φ +/- δ.
Αφού κατά τη μεσημβρινή διάβαση μπορούμε να βρούμε το πλάτος με συνδυασμό της κλίσεως και του ύψους είναι απαραίτητο να γνωρίζουμε τη σχέση που συνδέει τα τρία αυτά στοιχεία σε κάθε περίπτωση. Οι δυνατές θέσεις του αστεριού κατά την **άνω μεσημβρινή διάβαση** είναι οι Α-Β-Γ σε σχέση με το ζενίθ του παρατηρητή όπως φαίνεται στο σχήμα.

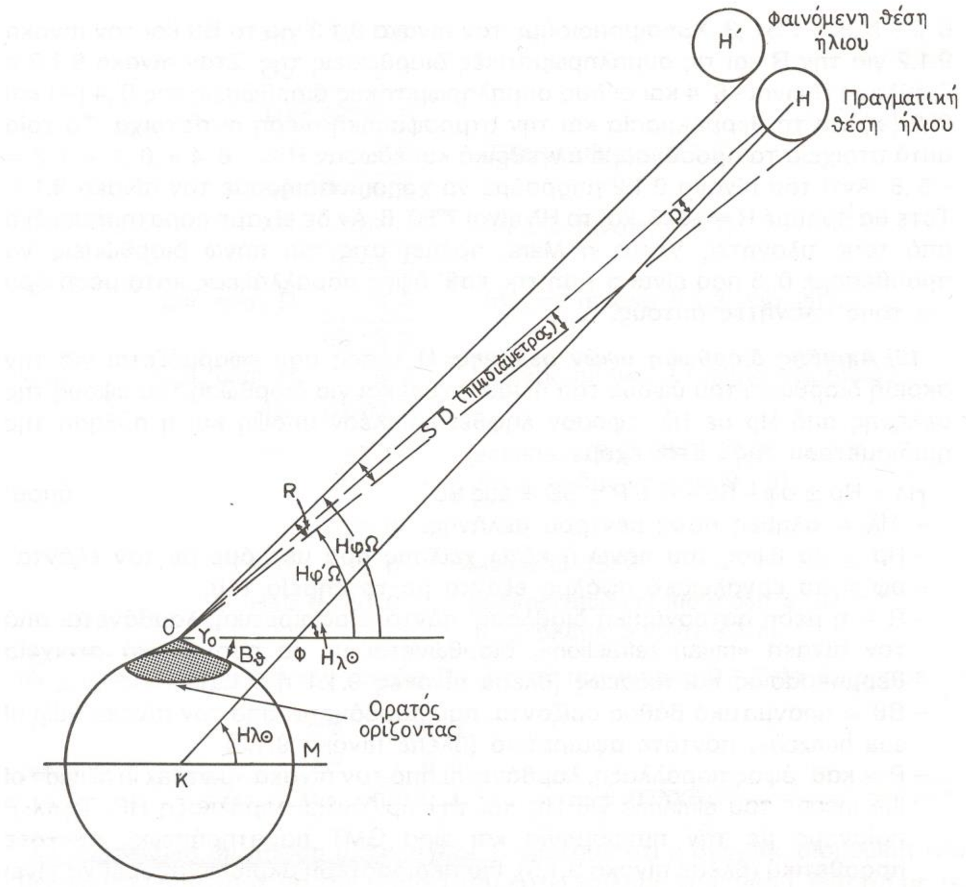


Το αστέρι Α έχει ομώνυμη κλίση με τον παρατηρητή και πραγματοποιεί άνω μεσημβρινή διάβαση με Αζλ 0^o όπου ZS = AS – AZ ή φ = δ – Zλ.
Το αστέρι Β έχει ομώνυμη κλίση και πραγματοποιεί άνω μεσημβρινή διάβαση με Αζλ 180^o όπου ZS = ZB + BS ή φ = Zλ + δ.
Το αστέρι Γ έχει ετερώνυμη κλίση με τον παρατηρητή και πραγματοποιεί άνω μεσημβρινή διάβαση με Αζλ 180^o όπου ZS = ZΓ – ΓS ή φ = Zλ – δ.
Για την εύκολη εφαρμογή των περιπτώσεων αυτών η ζενιθιακή απόσταση είναι πάντοτε αντίθετη προς τον πόλο που είναι στραμμένος ο παρατηρητής.
Όταν Zλ και δ είναι ομώνυμα προσθέτουμε και δίνουμε τη κοινή επωνυμία. Όταν είναι ετερώνυμα αφαιρούμε το μικρότερο από το μεγαλύτερο και δίνουμε στο πλάτος την επωνυμία του μεγαλυτέρου.

5.7 ΑΚΡΙΒΗΣ ΔΙΟΡΘΩΣΗ ΥΨΩΝ ΗΛΙΟΥ.

Αν ληφθούν υπόψη όλοι οι παράγοντες που επηρεάζουν την διόρθωση του ύψους σε αληθές(βλέπε σχήμα) προκύπτει:

Hλ = Hρ +/- σφ – Bθ – R + P +/- SD



- Hρ = το ύψος που μετράμε με τον εξάντα.
- σφ = το εργαλειακό σφάλμα εξάντα
- R = η μέση αστρονομική διάθλαση
- Bθ = πραγματικό βάθος ορίζοντα
- P = παράλλαξη καθ’ ύψος
- SD = ημιδιάμετρος

Για την διόρθωση των υψών των αστεριών χρησιμοποιούμε τον ίδιο τύπο όμως δεν λαμβάνεται υπόψη η ημιδιάμετρος, αφού τα αστέρια δεν έχουν τέτοιες διαστάσεις, και η παράλλαξη(εκτός Αφροδίτης και Άρη) λόγω της αμελητέας ποσότητάς της. Υπάρχουν πίνακες που δίνουν συγκεντρωτικά τις διορθώσεις αυτές(Brown’s nautical almanac).

Κεφάλαιο 6^o

Εφαρμογή $1^η$

Περί ώρα ζώνης 09:46:06 της $14^{ης}$ Μαΐου 1982 σε στίγμα αναμετρήσεως φ = 29^o 59΄Β, λ = 69^o 58΄Δ μετρήσαμε το κάτω χείλος ηλίου Ηρ = 62^o 30΄ με σφάλμα εξάντα 1΄ θετικό, από ύψος παρατηρητή 23μ. Να υπολογιστούν τα στοιχεία της ευθείας θέσεως.

λ = 69^o 58΄ → ZD = 5ω

ZT = 09:46:06
GMT = 14:46:06
GHA = 30^o 55,8΄(1400)
+$\underline{11^o\ 31{,}5΄}$(incr.)
GHA = 42^o 37,3΄
-λ(Δ) $\underline{69^o\ 58΄}$
LHA = 332^o 29,3

Ηρ = 62^o 30΄
σφ = $\underline{\quad 1΄}$(+)
Ητ = 62^o 31΄
t.cor.= 7,2΄(+)
mon.cor.= $\underline{\quad 0{,}2΄}$(-)
Ηλ = 62^o 38

Dec = 18^o 38,1΄Β d = + 0,6
d.cor= $\underline{\quad 0{,}5}$
δ = 18^o 38,6Β

λογημπρ LHA = 8,75237
λογσυνφ = 9,93760
λογσυνδ = $\underline{9{,}97659}$
λογημπρχ = 8,66656

Ημπρχ = 0,04640
Ημπρ(φ ~ δ) = 0,00976
ημπρΖα = 0,05616

Ζα = 27^o 25΄
~ $\underline{89^o\ 60΄}$
Ηα = 62^o 35΄
Ηλ = $\underline{62^o\ 38΄}$
ΔΗ = + 3΄

ημΑζλ = συνδημLHA/συνΗλ → Αζλ = Ν 72,2 Α διότι η κλίση του ηλίου είναι νοτιότερα από το πλάτος και LHA>180^o. δηλαδή Αζλ = 108^o.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ $2^{Η}$

Περί ώρα ζώνης 12:23 της 14.5.82 σε στίγμα αναμετρήσεως φ = 35º 44΄Β και λ = 23º 10΄Α, στραμμένοι προς το νότο, μετρήσαμε το ύψος του κάτου χείλους ηλίου κατά τη μεσημβρινή του διάβαση Ηρ = 72º 45΄ με σφάλμα οργάνου 1΄ προσθετικό και από ύψος παρατηρητή 15μ. Να βρεθεί το μεσημβρινό πλάτος.

λ = 23º 10΄ → ZD = 2ω
ZT = 1223 → GMT = 1023 dec = 18º 35,7 B d =+ 0,6 → δ = 18º 36΄Β

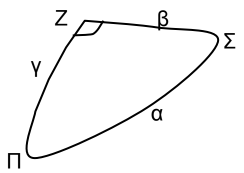
Ηρ = 72º 45΄
σφ + 1΄
Ητ =72º 46΄
t.cor. 8,7΄(+)
m.cor 0,2 (-)
Ηλ = 72º 54,5

Ζλ = 17º 05,5΄Β
δ = 18º 36΄ Β
φ = 35º 41,3 Β

Εφαρμογή $3^{η}$

Να υπολογιστεί η ωρική γωνία Ω ενός αστέρα Σ, του οποίου η απόκλιση είναι δ = 47º 50΄Β, σε ένα τόπο πλάτους φ = 50º 38΄Β τη στιγμή που ο αστέρας διέρχεται από τον πρώτο κάθετο.

Όταν ο αστέρας βρίσκεται στο πρώτο κάθετο, τότε το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσεως είναι ορθογώνιο καθώς Αζλ = 90º = Ζ.



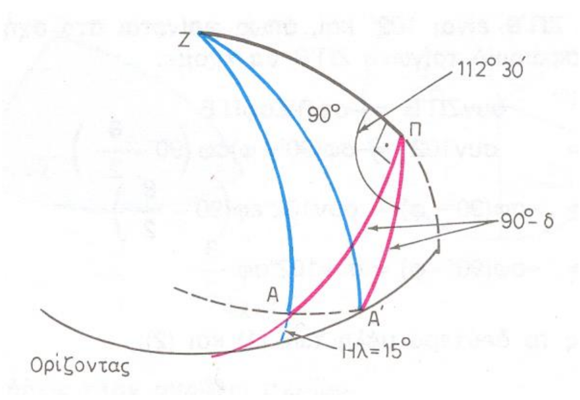
Επομένως στο τρίγωνο θέσεως γνωρίζουμε την πλευρά ΠΖ = 90º – φ = 90º - (50º 38΄) = 39º 22΄, και την πλευρά ΠΣ = 90º – δ = 90º – (47º 50΄) = 42º 10΄.
Ισχύει:
εφγ = συνΠεφα → συνΠ = εφγ/εφα = εφγσφα

λογσυνΠ = λογεφγ + λογσφα →
λογσυνΠ = λογεφ(39º 22΄) + λογσφ(42º 10΄) →
λογσυνΠ = 9,91404 + 0,04302 →
λογσυνΠ = 9,95706 →
Π = Ω = 25º 3,7΄

Εφαρμογή 4η

Ακριβώς 1ω και 30λ μετά την ανατολή, η ωρική γωνία του ηλίου ήταν 6ω και το ύψος του 15°. Να υπολογισθεί το πλάτος της θέσεως και η κλίση του ηλίου(υποθέτουμε ότι είμαστε στο Βόρειο ημισφαίριο).

Όταν η ωρική γωνία είναι 6ω δηλαδή 90° το σφαιρικό τρίγωνο ΠΖΑ είναι ορθογώνιο.



Στο τρίγωνο αυτό έχουμε ΖΑ = 90° – Ηλ =90° – 15° = 75°.

συνΖΑ = συνΠΖσυνΠΑ (από τύπο συνημίτονων σελίδα 17 και αφού συνΠ =συν90° = 0) .

συν75° = συν(90° - φ)συν(90° – δ) $\rightarrow$

συν75° = ημφημδ

Όταν ο ήλιος ανέτειλε η ωρική του γωνία ήταν 6ω + 1,5ω = 7,5ω = 112° 30΄. Τη στιγμή της ανατολής το σφαιρικό τρίγωνο είναι ορθόπλευρο διότι Ηλ = 0° άρα ΖΑ = 90°. Από τύπο (ε) σελίδα 15, για τις συνθήκες του προβλήματος έχουμε:

συνΖΠΑ΄ = -σφΠΖσφΠΑ΄ $\rightarrow$ συν(112° 30΄) = -σφ(90° – φ)σφ(90° – δ) $\rightarrow$
-συν(67° 30΄) = -εφφεφδ $\rightarrow$
συν(67° 30΄) = εφφεφδ (2)

διαιρώντας την (2) με την (1) $\rightarrow$

ημφημδ/ εφφεφδ = συν75°/ συν(67° 30΄) = 0,67633 $\rightarrow$
συνφσυνδ = 0,67633 (3)
προσθέτοντας (3) και (1) προκύπτει
ημφημδ + συνφσυνδ = 0,67633 + συν75° = 0,93515 $\rightarrow$
συν(φ – δ) = 0,93515 (4)

αφαιρώντας (3) και (1) προκύπτει
συνφσυνδ – ημφημδ = 0,67633 – συν75° = 0,41751 $\rightarrow$
συν(φ +δ) = 0,41751 (5)
από (4) και (5) :
φ – δ = 20° 44,9΄ (6) και φ + δ = 65° 19,4΄ (7)
από (6) + (7) $\rightarrow$ 2φ = 86° 4,3΄ $\rightarrow$ φ = 43° 2,2΄Β και δ = 22° 17,2 Β

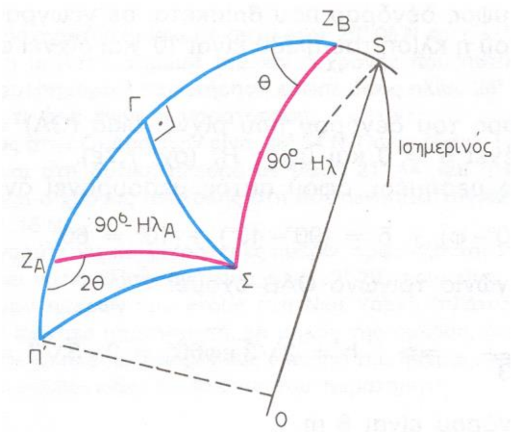
Εφαρμογή 5η

Δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε δυο τόπους Α και Β στον ίδιο μεσημβρινό παρατηρούν το ύψος αστέρα την ίδια στιγμή. Στον Α το ύψος είναι 41° 09΄ και στον Β είναι 30° 59΄. Ο τόπος Β βρίσκεται σε πλάτος 20° S. Να υπολογισθεί το πλάτος του Α, αν το αζιμούθ του αστέρα είναι θ στον τόπο Β και 2θ στον τόπο Α.

Έστω Σ ο αστέρας. Εφόσον το αζιμούθ μετρείται από τον υπέρ τον ορίζοντα πόλο, ο Α πρέπει να είναι προς νότια του Β.

$Z_{\beta}\Sigma = 90^o - (30^o\ 59') = 59^o\ 01'$

$Z_A\Sigma = 90^o - (41^o\ 09') = 48^o\ 51'$
$Z_BS = 20^o$
Στο σφαιρικό τρίγωνο $Z_AZ_B\Sigma$ εφαρμόζουμε το νόμο των ημιτόνων:



$ημ(180^o - 2θ)/ημZ_B\Sigma = ημθ/ημZ_A\Sigma \Leftrightarrow ημ(180^o - 2θ)\ ημZ_A\Sigma = ημZ_B\Sigma\ ημθ \Leftrightarrow$

$ημ(180^o - 2θ) = (ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma)\ ημθ \Leftrightarrow ημ180συν2θ - ημ2θσυν180 = (ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma)\ ημθ$

$-(-)ημ2θ = (ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma)\ ημθ$

$ημ2θ = (ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma)\ ημθ \Leftrightarrow 2ημθσυνθ = (ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma)\ ημθ$

$2συνθ = ημZ_B\Sigma/ημZ_A\Sigma \Leftrightarrow συνθ = 0{,}56928 \rightarrow θ = 55^o\ 18'$.

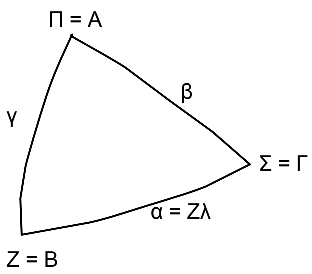
Φέρουμε από το Σ μέγιστο κύκλο κάθετο στον Z_AZ_B που τον τέμνει στο Γ. Από τα σχηματιζόμενα ορθογώνια τρίγωνα $Z_B\Gamma\Sigma$ και $\Gamma Z_A\Sigma$ υπολογίζουμε τις πλευρές $Z_B\Gamma$ και $Z_A\Gamma$ αντίστοιχα.

Από τύπο (3) σελίδα 14 ισχύει εφβ = συνΓεφα, άρα $εφZ_B\Gamma = συνZ_BεφZ_B\Sigma$ όπου υπολογίζεται $Z_B\Gamma = 43^o\ 28{,}4'$

Ανάλογα προκύπτει πως $Z_A\Gamma = 21^o\ 55{,}8'$
Άρα το πλάτος του Α θα είναι ίσο με:
$Z_BS + Z_B\Gamma + Z_A\Gamma = 85^o\ 24{,}2'$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 6^{Η}

Δίδονται η τοπική ωρική γωνία $Ω = 73^o\ 18΄$, το πλάτος $φ = 22^o\ 44΄Β$ και η κλίση αστεριού $δ = 15^o\ 35΄Β$. Να υπολογιστεί η ζενιθιακή απόσταση.



ημπρα = ημπρ(β – γ) + ημβημγημπρΑ⇔
ημπρΖλ = ημπρ[(90-δ-(90-φ)] + ημ(90-δ)ημ(90-φ)ημπρΩ

ημπρΖλ = ημπρ(φ-δ) + συνδσυνφ ημπρΩ

έστω ημπρκ = συνδσυνφ ημπρΩ

λογημπρκ = λογσυνδ + λογσυνφ + λογημπρΩ

λογημπρκ = λογσυν(15^o 35΄) + λογσυν(22^o 44΄) + λογημπρ(73^o 18΄)

λογημπρκ = 9,98373 + 9,96488 + 9,55184 = 9,50045

ημπρκ = 0,31656

ημπρΖλ = ημπρκ + ημπρ(φ-δ) = 0,31656 + ημπρ(07^o 09΄)

ημπρΖλ = 0,31656 + 0,00389 = 0,32045

άρα Ζλ = 68^o 57,3΄

Βιβλιογραφία

- Πέππας Ι. Χρήστος, Εκπαιδευτικό Κείμενο Σφαιρικής Τριγωνομετρίας, Ακαδημία Εμπορικού Ναυτικού
- Ματούλας Αθανάσιος, Σημειώσεις σφαιρικής Τριγωνομετρίας
- portal.survey.ntua.gr/main/courses/.../geoastro/.../GeoAstro_chapter11
- el.wikipedia.org/wiki
- users.sch.gr/gsimos/.../sferikatrigona.doc
- www.math.uoa.gr/me/dipl/dipl_Lattas.Kyriakos.pdf