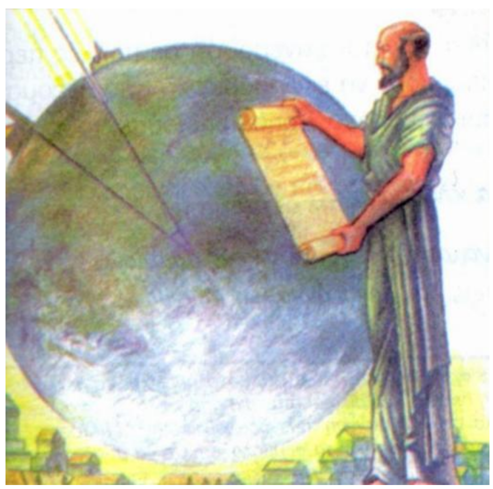
Α.Ε.Ν ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΠΛΟΙΑΡΧΩΝ

ΠΤΥΧΙΑΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΘΕΜΑ : ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΝΑΥΤΙΛΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ



ΣΠΟΥΔΑΣΤΡΙΑ : ΚΑΛΚΑΝΗ ΔΗΜΗΤΡΑ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑ

ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : κ. Ματούλας Αθανάσιος

ΑΠΡΙΛΙΟΣ 2016

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία έχει ως στόχο να κάνει μνεία στις εφαρμογές της σφαιρικής τριγωνομετρίας στην Ναυτιλία και στην Αστρονομία. Η σφαιρική τριγωνομετρία μέσο των παρακάτω εφαρμογών της συνέβαλε σε συνδυασμό με τα βασικά εργαλεία του ναυτίλου τα οποία ήταν ο Εξάντας καθώς και το ρολόι να φέρουν σιγά σιγά με την πάροδο των αιώνων και τις περαιτέρω εξελίξεις της τεχνολογίας την ναυσιπλοΐα στην μορφή που είναι σήμερα. Ανάλυση των εννοιών καθώς και πιο εκτενής περιγραφή των ανωτέρω υπάρχει εντός της παρούσης πτυχιακής εργασίας.

Επίσης αυτό που θέλω να επισημάνω είναι την σπουδαιότητα των εφαρμογών της σφαιρικής τριγωνομετρίας στην ναυτιλία και στην αστρονομία ως εργαλείο του ναυτίλου είτε είναι σε πλοίο είτε σε πτητικό μέσο διότι μέσω αυτής επιλύονται βασικά καθημερινά θέματα πάνω στην βασική του εργασία, δηλαδή την πλοήγηση του πλοίου.

Για την σύνταξη της παρούσας πτυχιακής εργασίας χρησιμοποιήθηκαν τόσο πηγές από την Ελληνική βιβλιογραφία όσο και από διάφορους επιστημονικούς ιστότοπους της Ελλάδας και του εξωτερικού.

Εν κατακλείδι η ενασχόληση μου με την παρούσα πτυχιακή με έκανε να αναδειχθεί μέσα μου κάτι που ήδη γνώριζα αλλά η ενασχόληση μου με το παρών θέμα με έκανε να το αναδείξω περαιτέρω, ότι δηλαδή όταν βρίσκεσαι είτε σε μία γέφυρα ενός πλοίου είτε στον θάλαμο διακυβέρνησης ενός αεροσκάφους η ελικόπτερου αυτό που σε περιβάλλει μέσα στα διάφορα μηχανήματα είναι … μαθηματικά όπως συμβαίνει βέβαια και σε πολλά πράγματα στην καθημερινότητα μας.

ΕΚΠΟΝΗΣΗ

Η παρούσα πτυχιακή εργασία με τίτλο «ΧΡΗΣΙΜΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ ΣΤΗΝ ΝΑΥΤΙΛΙΑ ΚΑΙ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ» εκπονήθηκε από την Καλκάνη Δήμητρα Ελευθερία, Σπουδάστρια του ΣΤ΄ εξαμήνου της σχολής Πλοιάρχων της ΑΕΝ Μακεδονίας υπό την επίβλεψη του κ. Ματούλα Αθανάσιου και ολοκληρώθηκε τον Απρίλιο του 2016

1.ΕΝΟΙΟΛΟΓΙΑ

Πριν προχωρήσουμε σε παραδείγματα και εφαρμογές της σφαιρικής τριγωνομετρίας στην ναυτιλία και στην αστρονομία θα ήθελα να αναλύσουμε λίγο εννοιολογικά την σφαιρική τριγωνομετρία καθώς και την αστρονομία στις παρακάτω παραγράφους.

1.1 ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

Η **Σφαιρική τριγωνομετρία** αποτελεί εν μέρει αντικείμενο της ουράνιας μηχανικής στην αστρονομία και αφορά στην επίλυση σφαιρικών τριγώνων.

Πιο συγκεκριμένα η σφαιρική τριγωνομετρία είναι ο κλάδος της σφαιρική γεωμετρίας που ασχολείται με τις σχέσεις μεταξύ των τριγωνομετρικών συναρτήσεων των πλευρών και των γωνιών των σφαιρικών πολυγώνων (ειδικά σφαιρικά τρίγωνα) που ορίζεται από έναν αριθμό τεμνόμενων μεγίστων κύκλων της σφαίρας. Η σφαιρική τριγωνομετρία έχει μεγάλη σημασία για τους υπολογισμούς στην αστρονομία, γεωδαισία και πλοήγησης σε πλοία αεροσκάφη κτλ.

Οι απαρχές της σφαιρικής τριγωνομετρίας στα ελληνικά μαθηματικά και τις σημαντικές εξελίξεις στα Αραβικά μαθηματικά συζητήθηκε πλήρως στην Ιστορία της τριγωνομετρίας και των Μαθηματικών κατά τον μεσαίωνα στην Αραβία. Το θέμα καρποφόρησαν στη νεότερη φορές με σημαντικές εξελίξεις από τον John Napier, Delambre και άλλοι, επιτυγχάνοντας ουσιαστικά πλήρη μορφή από τα τέλη του δέκατου ένατου αιώνα, με τη δημοσίευση του Todhunter στο βιβλίο «Σφαιρική τριγωνομετρία για τη χρήση των κολεγίων και των σχολείων». Αυτό το βιβλίο είναι πλέον άμεσα διαθέσιμες στο διαδίκτυο. Οι μόνες σημαντικές εξελίξεις από τότε ήταν η εφαρμογή των μεθόδων φορέα για την παραγωγή των θεωρημάτων και τη χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για να φέρει σε πέρας μακροσκελείς υπολογισμούς.

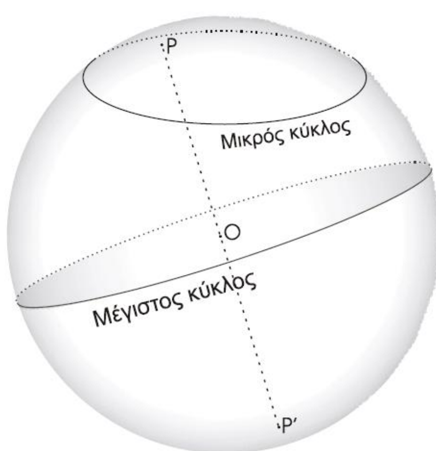
Η Σφαιρική Γεωμετρία έχει εφαρμογές στην Αστρονομία, Ναυσιπλοΐα, Χαρτογραφία και αλλού. Στην Αστρονομία, εφαρμόζεται στη μελέτη προβλημάτων που δεν μας ενδιαφέρει η απόσταση των ουρανίων σωμάτων από τη Γη αλλά η θέση τους στον ουράνιο θόλο που θεωρείται σφαιρικός με κέντρο το κέντρο της Γης. Η Γη θεωρείται κατά προσέγγιση σφαιρική, επομένως η σφαιρική γεωμετρία έχει εφαρμογές και στις επιστήμες που σχετίζονται με το σχήμα της Γης. Μία από αυτές είναι η Ναυσιπλοΐα και χρησιμεύει για να γίνονται υπολογισμοί πορείας.

Είναι γνωστό από την αρχαιότητα ότι η επιφάνεια της σφαίρας δεν είναι δυνατόν να αναπτυχθεί στο επίπεδο. Δηλαδή, δεν μπορούμε να αναπτύξουμε τη σφαίρα στο επίπεδο όπως κάναμε με τον κύλινδρο και τον κώνο. Εάν προσπαθήσουμε να κάνουμε αυτό το ανάπτυγμα, θα τσαλακώσουμε ή θα σκίσουμε την επιφάνεια της σφαίρας. Αυτό συμβαίνει διότι η σφαίρα έχει καμπυλότητα που διαφέρει ποιοτικά από αυτήν του κυλίνδρου ή του κώνου. Λόγω αυτής της ιδιότητας οι χάρτες δεν μπορεί να είναι ακριβείς.

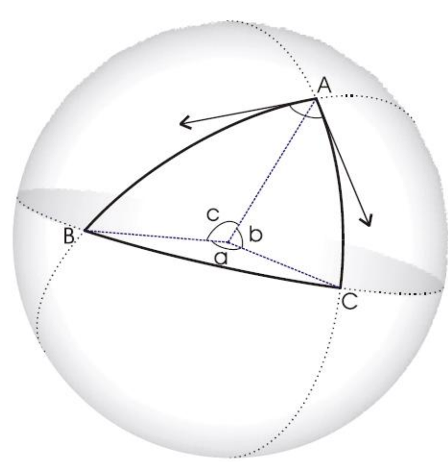
1.2 ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΣΦΑΙΡΙΚΗΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑΣ

Σε πολλά προβλήματα της Χαρτογραφίας, της Ανώτερης Γεωδαισίας, της Γεωδαιτικής Αστρονομίας και της Δορυφορικής Γεωδαισίας εμφανίζονται γεωμετρικά μεγέθη που αναφέρονται σε μια σφαιρική επιφάνεια. Σε αντιστοιχία με την (επίπεδη) Τριγωνομετρία, η **Σφαιρική Τριγωνομετρία** εξετάζει τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων του βασικού σχήματος μιας σφαιρικής επιφάνειας, δηλαδή του σφαιρικού τριγώνου.

Υπενθυμίζεται πως όταν ένα επίπεδο τέμνει μια σφαίρα, η τομή είναι πάντα ένας κύκλος. Αν το επίπεδο περνά από το κέντρο της σφαίρας, ο κύκλος λέγεται *μέγιστος κύκλος,* ενώ στην αντίθετη περίπτωση λέγεται *μικρός κύκλος* (σχήμα 1). Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι αλλά μόνο ένας μέγιστος, που ορίζει και την συντομότερη διαδρομή μεταξύ των σημείων αυτών. Επομένως, οι *γεωδαισιακές γραμμές* σε μια σφαίρα είναι μέγιστοι κύκλοι. Αν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, τότε όλοι οι κύκλοι που περνούν από αυτά είναι μέγιστοι.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Ένα ***σφαιρικό τρίγωνο*** ορίζεται από τρία τυχαία σημεία μιας σφαιρικής επιφάνειας που δεν βρίσκονται στον ίδιο μέγιστο κύκλο (*κορυφές* του τριγώνου) και από τα τρία τόξα <u>μέγιστων</u> κύκλων μεταξύ των σημείων αυτών, ανά ζεύγη (*πλευρές* του τριγώνου). Ας σημειωθεί πως κάθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι το <u>μικρότερο</u> από τα δύο τόξα στα οποία χωρίζεται κάθε μέγιστος κύκλος (σχήμα 2).

Πρέπει να γίνει διάκριση μεταξύ του *μέτρου* **a** κάθε πλευράς, που είναι το 'γωνιακό' μέτρο του τόξου του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου (δηλαδή το μέτρο της αντίστοιχης επίκεντρης γωνίας) και του *μήκους* **s** της πλευράς, δηλαδή του πραγματικού μήκους του τόξου σε μονάδες μήκους (π.χ. σε μέτρα). Τα δύο αυτά μεγέθη συνδέονται μέσω της ακτίνας **R** της σφαίρας (στις ίδιες μονάδες μήκους):

$\mathbf{s} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}$

Στο εξής, όταν αναφερόμαστε στην πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου θα εννοούμε το μέτρο της.

Τα άλλα τρία βασικά στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου είναι οι τρεις *γωνίες* του, που είναι οι δίεδρες γωνίες μεταξύ των επιπέδων των μεγίστων κύκλων που ορίζουν το τρίγωνο. Ισοδύναμα, οι γωνίες αυτές είναι οι αντίστοιχες (επίπεδες) γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε κορυφή του τριγώνου.

Παραδοσιακά, οι γωνίες του σφαιρικού τριγώνου συμβολίζονται με κεφαλαία γράμματα, π.χ. A, B, C (όπως οι αντίστοιχες κορυφές), ενώ οι πλευρές του με τα αντίστοιχα πεζά γράμματα, π.χ. a, b, c έτσι ώστε στοιχεία με το ίδιο γράμμα να βρίσκονται απέναντι.

Όπως ήδη αναφέρθηκε, οι πλευρές και οι γωνίες ενός σφαιρικού τριγώνου είναι αδιάστατα μεγέθη (καθαροί αριθμοί) και μετρώνται σε ακτίνια (rad) ή σε συμβατικές μονάδες μέτρησης γωνιών (μοίρες, βαθμοί κλπ.). Από τον ορισμό του σφαιρικού τριγώνου προκύπτει ότι κάθε πλευρά του τριγώνου είναι μικρότερη από π (180°). Από την βασική ιδιότητα των πολικών τριγώνων, που αναφέρεται παρακάτω, συνάγεται ότι και κάθε γωνία του είναι μικρότερη από π.

Σφαιρική υπεροχή

Βασική ιδιότητα ενός σφαιρικού τριγώνου είναι ότι ***το άθροισμα των γωνιών του είναι πάντα μεγαλύτερο από π***. Η διαφορά :

$E = (A + B + C) - \pi$

λέγεται *σφαιρική υπεροχή* και είναι ίση με την στερεά γωνία που ορίζει το τρίγωνο, όπως φαίνεται από το κέντρο της σφαίρας. Επομένως, η σφαιρική υπεροχή **E** μπορεί να υπολογιστεί από το εμβαδόν **A** του σφαιρικού τριγώνου και την ακτίνα **R** της σφαίρας :

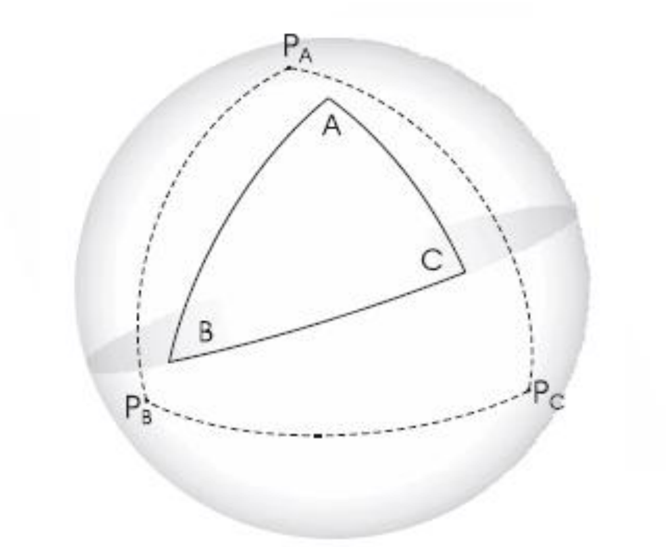
$$E = \frac{A}{R^2}$$

Η σφαιρική υπεροχή είναι και αυτή αδιάστατο μέγεθος (καθαρός αριθμός), όπως και η στερεά γωνία, συνήθως όμως εκφράζεται σε μοίρες ή βαθμούς (ή υποδιαιρέσεις τους).

Πολικό τρίγωνο

Σε κάθε μέγιστο κύκλο αντιστοιχεί μία μόνο διάμετρος της σφαίρας που είναι *κάθετη* στο επίπεδό του. Τα δύο σημεία της σφαιρικής επιφάνειας που ορίζει η διάμετρος αυτή λέγονται *πόλοι* του μέγιστου κύκλου.

Σε κάθε πλευρά ενός σφαιρικού τριγώνου αντιστοιχούν δύο πόλοι. Για παράδειγμα, στην πλευρά a (BC) αντιστοιχούν οι πόλοι P_A και $P_{A'}$, όπου ο πόλος P_A είναι ο πλησιέστερος προς την κορυφή A. Με όμοιο τρόπο ορίζονται και τα σημεία (πόλοι) P_B και P_C. Το σφαιρικό τρίγωνο με κορυφές τα σημεία P_A, P_B και P_C λέγεται *πολικό τρίγωνο* του τριγώνου ABC (σχήμα 3).



Σχήμα 3

Μεταξύ των στοιχείων των δύο τριγώνων ισχύει η σπουδαία ιδιότητα ότι: *οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού τριγώνου και αντίστροφα* :

a = π - A΄ και **A = π - a΄** κλπ.

Σχέσεις μεταξύ των στοιχείων σφαιρικού τριγώνου

Σε όλες τις σχέσεις μεταξύ των στοιχείων ενός σφαιρικού τριγώνου, που ακολουθούν, μπορεί να εφαρμοσθεί κυκλική μετάθεση των συμβόλων (δηλαδή a → b → c → a κλπ).

1. Ανισώσεις

a. $A < B \Leftrightarrow \alpha < \beta$

b. A+B > π ⇔ α+β > π

c. | β-γ | < α < β+γ

d. α+π > β+γ

2. <u>Εξισώσεις</u>

α. $\frac{\eta\mu\,\alpha}{\eta\mu\,A} = \frac{\eta\mu\,\beta}{\eta\mu\,B} = \frac{\eta\mu\,\gamma}{\eta\mu\,\Gamma}$ [νόμος ημιτόνου]

συν α= συν β * συν γ + ημ β * ημ γ * cos A

β. συν A = -συν B συν Γ + ημ B * ημ Γ * συν α [νόμος συνημιτόνου ή Gauss]

ημ α * συν B = συν β * ημ γ – ημ β * συν γ * συν A

γ. ημ A * συν β = συν B * ημ Γ + ημ B * συν Γ * συν α [τύπος των 5 στοιχείων]

δ. συν α * συν B = ημ α * συν γ – ημ B * συν Γ

$$\varepsilon\varphi = \frac{\alpha}{2} = \varepsilon\varphi\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}} = \varepsilon\varphi\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}$$

ε. $\varepsilon\varphi\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}} = \sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}}$ [αναλογίες του Neper]

$$\eta\mu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}} = \eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

στ. $\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2} = \sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}} = \eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}$ [συναλογίες του Delambre]

3. <u>Άλλες σχέσεις</u>

Έστω **p** η ημιπερίμετρος του τριγώνου, δηλ. : p = ½ (α + β + γ). Τότε :

α. $\varepsilon\varphi^2\frac{E}{4} = \varepsilon\varphi\frac{p}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{p-\alpha}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{p-\beta}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{p-\gamma}{2}$

β. $\varepsilon\varphi^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\eta\mu\frac{E}{2} \cdot \eta\mu(A - \frac{E}{2})}{\eta\mu\left(B - \frac{E}{2}\right) \cdot \eta\mu(\Gamma - \frac{E}{2})}$, όπου Ε είναι η σφαιρική υπεροχή.

γ. $\sigma\upsilon\nu^2 \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu(p) \cdot \eta\mu(p-\alpha)}{\eta\mu(\beta) \cdot \eta\mu(\gamma)}$

δ. $\varepsilon\varphi^2 \frac{A}{2} = \frac{\eta\mu(p-\beta) \cdot \eta\mu(p-\gamma)}{\eta\mu(p) \cdot \eta\mu(p-\alpha)}$ [τύποι του Borda]

Ορθογώνια - ορθόπλευρα τρίγωνα

Αν κάποια (-ες) γωνία ή πλευρά του τριγώνου είναι ορθή (90°) έχουμε ένα *ορθογώνιο* (ή δισ- ή τρισορθογώνιο) ή ένα *ορθόπλευρο* (ή δισ- ή τρισορθόπλευρο) σφαιρικό τρίγωνο. Στην περίπτωση αυτή οι τύποι που συνδέουν τα στοιχεία του τριγώνου απλοποιούνται σημαντικά, π.χ.

Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο (Α = 90°) :

$$\sigma\upsilon\nu\,\alpha = \sigma\upsilon\nu\,\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\,\gamma = \sigma\upsilon\nu\,B \cdot \sigma\upsilon\nu\,\Gamma$$

$$\eta\mu\,\beta = \eta\mu\,\alpha \cdot \eta\mu\,B = \varepsilon\varphi\,\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\,\Gamma$$

$$\eta\mu\,\gamma = \eta\mu\,\alpha \cdot \eta\mu\,\Gamma = \varepsilon\varphi\,\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\,B$$

$$\sigma\upsilon\nu\,B = \sigma\upsilon\nu\,\beta \cdot \eta\mu\,\Gamma = \varepsilon\varphi\,\Gamma \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha$$

$$\sigma\upsilon\nu\,\Gamma = \sigma\upsilon\nu\,\gamma \cdot \eta\mu\,B = \varepsilon\varphi\,\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\,\alpha$$

Με τη βοήθεια της βασικής ιδιότητας των πολικών τριγώνων μπορούν να γραφούν αντίστοιχες σχέσεις για ένα ορθόπλευρο τρίγωνο (α = 90°).

Επιλύσεις σφαιρικών τριγώνων

Αν είναι γνωστά **τρία** από τα βασικά στοιχεία ενός σφαιρικού τριγώνου, μπορούμε να υπολογίσουμε τα υπόλοιπα. Η εργασία αυτή λέγεται *επίλυση* του σφαιρικού τριγώνου και γίνεται με χρήση των κατάλληλων από τους τύπους που αναφέρθηκαν παραπάνω. Λόγω του πλήθους των ισοδυνάμων τύπων, η διαδικασία επίλυσης μπορεί να γίνει με πολλούς τρόπους. Για διευκόλυνση, αναφέρουμε μερικούς.

<u>Α. Γενικά</u>: 1) Όπου είναι δυνατόν, ο υπολογισμός των αγνώστων να γίνεται από το συνημίτονο ή την εφαπτομένη, που δίνουν μονοσήμαντη λύση στην περιοχή -90° ως +90°.

2) Επίσης, όπου είναι δυνατόν, ο υπολογισμός να γίνεται από την εφαπτομένη σε μορφή λόγου δύο μεγεθών, οπότε υπολογίζεται μονοσήμαντα το σωστό τεταρτημόριο της λύσης (από τα πρόσημα αριθμητή και παρανομαστή).

3) Στις περιπτώσεις διπλών λύσεων, χρήση των σχέσεων ανισότητας μεταξύ των στοιχείων επιτρέπει την απόρριψη κάποιας λύσης που δεν είναι δεκτή.

<u>Β. Προτάσεις για ειδικές περιπτώσεις</u> :

1) *Δίνονται τα **a , b , c** και ζητούνται τα **A , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.1)

2) *Δίνονται τα **A , B , C** και ζητούνται τα **a , b , c*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.2)

3) *Δίνονται τα **A , b , c** και ζητούνται τα **a , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.1) για την πλευρά ***a*** και τον τύπο των 5 στοιχείων (2.c.1) για τα ***B*** και ***C.***

4) *Δίνονται τα **a , B , C** και ζητούνται τα **A , b , c*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο συνημιτόνου (2.b.2) για την γωνία ***A*** και τον τύπο των 5 στοιχείων (2.c.2) για τα ***b*** και ***c.***

5) *Δίνονται τα **a , b , A** και ζητούνται τα **c , B , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο ημιτόνου (2.a.) για την γωνία ***B*** *(προσοχή στις δύο πιθανές λύσεις !)* και τις αναλογίες Neper, (2.e.1) για το ***c*** και (2.e.2) για το ***C***.

6) *Δίνονται τα **a , A , B** και ζητούνται τα **b , c , C*** : Χρησιμοποιούμε το νόμο ημιτόνου (2.a.) για την πλευρά ***b*** *(προσοχή στις δύο πιθανές λύσεις !)* και τις αναλογίες Neper, (2.e.1) για το ***c*** και (2.e.2) για το ***C***.

1.3 ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

Η **Αστρονομία** (αγγλικά Astronomy, διεθνής όρος εκ των ελληνικών λέξεων «ἄστρον» + «νέμω») είναι η φυσική επιστήμη που ερευνά όλα τα ουράνια σώματα [όπως άστρα, γαλαξίες, νεφελώματα, πλανήτες (συμπεριλαμβανομένης της Γης) δορυφόροι, αστεροειδεις, κομήτες και άλλα], τη Φυσική, τη Χημεία, την προέλευση και την εξέλιξη τέτοιων αντικειμένων, τα φαινόμενα που συμβαίνουν στον χώρο έξω από την ατμόσφαιρα της Γης, τα οποία συμπεριλαμβάνουν εκρήξεις υπερκαινοφανών αστέρων, εκλάμψεις ακτίνων γ και κοσμική ακτινοβολία μικροκυμάτων υποβάθρου. Ένα σχετικό αλλά διακριτό θέμα αποτελεί η Κοσμολογία, που ασχολείται με τη μελέτη του σύμπαντος ως ολότητα

Η Αστρονομία είναι μια από τις αρχαιότερες επιστήμες. Γενικά, η Αστρονομία γεννήθηκε με την εμφάνιση του «διανοούμενου ανθρώπου» στον ημέτερο πλανήτη. Οι προϊστορικοί πολιτισμοί και οι πρώτοι ιστορικοί πολιτισμοί άφησαν αστρονομικά τεχνουργήματα, όπως αυτά που άφησαν οι Αρχαίοι Αιγύπτιοι, οι Νούβιοι, οι Βαβυλώνιοι, οι Αρχαίοι Έλληνες, οι Αρχαίοι Κινέζοι, οι Αρχαίοι Ινδοί, οι Αρχαίοι Ιρανοί και οι Μάγιας, που δείχνουν ότι ασχολούνταν με μεθοδικές παρατηρήσεις του νυκτερινού ουρανού. Ειδικότερα, όμως, για τους Αρχαίους Έλληνες, η «Αστρονομία» (και ως όρος που επιβίωσε πια) γεννήθηκε ακριβώς την ίδια εκείνη στιγμή που γεννήθηκε και η ελληνική μυθολογία και μάλιστα σε μια αμφίδρομη σχέση, γιατί η θεία (για τους Έλληνες της εποχής) Μούσα Ουρανία ήταν προστάτιδά της. Ωστόσο, πρακτικά απαιτούνταν η εφεύρεση και η εξέλιξη του τηλεσκοπίου, ώστε η Αστρονομία να μπορέσει να εξελιχθεί σε σύγχρονη επιστήμη. Ιστορικά, η Αστρονομία συμπεριλάμβανε ενασχολήσεις όπως η Αστρομετρία, η Αστρονομική Ναυτιλία, η Παρατηρησιακή Αστρονομία, ο σχεδιασμός ημερολογίων και η Αστρολογία, ενώ στις μέρες μας η επαγγελματική (τουλάχιστον) Αστρονομία συχνά θεωρείται συνώνυμη με την Αστροφυσική

Ταξινόμιση της Αστρονομίας

Κατά τη διάρκεια του 20ού αιώνα, το πεδίο της επαγγελματικής αστρονομίας διαχωρίστηκε σε δύο (2) μεγάλους κλάδους:

Στην Πρακτική Αστρονομία ή Παρατηρησιακή Αστρονομία (ή απλά Αστρονομία) η οποία και πραγματεύεται τις αστρονομικές παρατηρήσεις, για την άμεση λήψη αστρονομικών δεδομένων, με τα όργανα και τις μεθόδους που εκτελούνται αυτές οι αστρονομικές παρατηρήσεις, καθώς και κάποιους βασικοί υπολογισμούς με βάση τα δεδομένα που λήφθηκαν, από αυτές τις αστρονομικές παρατηρήσεις.

Στη Θεωρητική Αστρονομία που εστιάζει στην ανάπτυξη αναλυτικών ή και υπολογιστικών μοντέλων για την περιγραφή των αστρονομικών αντικειμένων και τα φαινόμενα που σχετίζονται με αυτά.

Οι δυο αυτοί κύριοι κλάδοι είναι συμπληρωματικοί μεταξύ τους, με τη Θεωρητική Αστρονομία να αναζητά τρόπους για να εξηγήσει τα παρατηρούμενα δεδομένα, αλλά και αντιστρόφως, η Παρατηρισιακή Αστρονομία ψάχνει δεδομένα για να επιβεβαιώσει τα κείμενα θεωρητικά συμπεράσματα[5].

Οι Αστρονομία είναι μια από τις λίγες επιστήμες στις οποίες ερασιτέχνες μπορούν ακόμη να παίζουν ενεργό λόγο: Ιδιαίτερα στην ανακάλυψη και στην παρατήρηση μεταβατικών φαινομένων, όπως τα μεταβλητά αστέρια ή οι κομήτες, ερασιτέχνες αστρονόμοι έχουν συνεισφέρει πολλές και σημαντικές αστρονομικές ανακαλύψεις.

Άλλοι (σχετικά μικρότεροι) κλάδοι της Αστρονομίας είναι οι ακόλουθοι:

Σφαιρική Αστρονομία η οποία θεωρώντας τα ουράνια σώματα ως μαθηματικά σημεία στην κοίλη επιφάνεια της ουράνιας σφαίρας αποτελεί την εφαρμογή της σφαιρικής τριγωνομετρίας στην Αστρονομία. Σ΄ αυτόν τον κλάδο οφείλεται η δυνατότητα της χαρτογραφίας και της έκδοσης αστρονομικών πινάκων.

Ουράνια Μηχανική η οποία εξετάζοντας τα ουράνια σώματα από δυναμική άποψη μελετά τις διέπουσες αυτών δυνάμεις ως και τα αποτελέσματα με βάση φυσικούς νόμους (π.χ. παγκόσμιας έλξης κ.ά.). Ο κλάδος αυτός στηρίζεται στην ανώτερη μαθηματική Ανάλυση και Θεωρητική Μηχανική. Διαμορφωτής αυτού ήταν ο Γάλλος μαθηματικός Λαπλάς στο μνημειώδες σύγγραμμά του «Μεκανίκ σελέστ».

Φυσική Αστρονομία ή Αστροφυσική η οποία εξετάζει τα ουράνια σώματα από φυσικής πλευράς, δηλαδή χημικής σύστασης, θερμοκρασίας, χρώματος, λαμπρότητας κλπ. Από αυτόν το κλάδο γίνεται η κατάταξη των ουρανίων σωμάτων (π.χ. αστέρες, πλανήτες, δορυφόροι κλπ). Κύριοι ακόμη επιμέρους κλάδοι αυτής είναι η «Αστρική Φωτομετρία» και η «Αστρική Φασματοσκοπία».

Ναυτική Αστρονομία ή Αστρονομική Ναυτιλία η οποία αποτελεί συνδυασμό της Πρακτικής Αστρονομίας και της Σφαιρικής Αστρονομίας τόσο για τις ανάγκες της ναυσιπλοΐας όσο και της αεροπλοΐας.

Περιγραφική Αστρονομία ή Κοσμογραφία η οποία περιγράφει τα ουράνια σώματα καθώς και τα διάφορα ουράνια φαινόμενα. Ο κλάδος αυτός χαρακτηρίζεται ως «ο ξεναγός του διαστήματος». Περιλαμβάνει δηλαδή τις βασικές γνώσεις της Αστρονομίας, τις οποίες και εκθέτει χωρίς αποδείξεις και χωρίς τη χρήση πολύπλοκων μαθηματικών τύπων.

Κοσμογονία σκοπός της οποίας είναι, εκ του συνδυασμού των πορισμάτων των διαφόρων άλλων κλάδων της Αστρονομίας η αποκάλυψη των νόμων της δημιουργίας και της εξέλιξης.

Ουράνια σώματα

Η Αστρονομία εξετάζει τους φυσικούς νόμους που διέπουν τα ουράνια (εκτός της γήινης ατμόσφαιρας) σώματα, τα οποία είναι δυνατόν να παρατηρηθούν με τις κατάλληλες μεθόδους.

Αστέρες. Οι αστέρες, αστέρια ή άστρα, είναι αέρια σώματα, στα οποία κυριαρχεί συνήθως το στοιχείο Υδρογόνο. Οι συνθήκες στους αστέρες είναι τέτοιες ώστε να λαμβάνουν χώρα θερμοπυρηνικές αντιδράσεις και να ακτινοβολούν ενέργεια σε μορφή ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Ο Ήλιος είναι ο κοντινότερος αστέρας στη Γη. Μία καθαρή ασέληνη νύχτα μπορούμε να διακρίνουμε περί τα 4000 αστέρια χωρίς οπτικά βοηθήματα. Αυτά είναι άστρα που ανήκουν στον Γαλαξία μας. Ο κοντινότερος αστέρας στο Ηλιακό Σύστημα είναι ο Εγγύτατος Κενταύρου (Proxima Centauri), σε απόσταση 4,2 ετών φωτός.

Πλανήτες. Οι πλανήτες είναι σώματα (αέρια όπως ο Δίας ή στερεά όπως η Γη) τα οποία δεν έχουν δυνατότητα να συντηρήσουν θερμοπυρηνικές αντιδράσεις. Οι πλανήτες του Ηλιακού μας Συστήματος περιφέρονται γύρω από τον Ήλιο. Οι πλανήτες συχνά διαθέτουν δορυφόρους, δηλαδή σώματα που περιστρέφονται γύρω τους. Ο μοναδικός φυσικός δορυφόρος της γης είναι η Σελήνη, το φεγγάρι.

Κομήτες, Αστεροειδείς. Σημαντικά μικρότερα από τους πλανήτες σώματα.

Νεφελώματα. Σχηματισμοί αερίων και σκόνης που εκτείνονται σε ευρύτερες περιοχές του Γαλαξία. Τα νεφελώματα συχνά είναι περιοχές δημιουργίας νέων αστέρων. Γνωστό νεφέλωμα είναι το «Μεγάλο Νεφέλωμα του Ωρίωνα» (Μ42) στον αστερισμό Ωρίωνα.

Σμήνη αστέρων. Σχηματισμοί αστέρων που έχουν βαρυτική αλληλεπίδραση. Διακρίνονται σε σφαιρωτά και ανοικτά σμήνη. Ένα από τα γνωστότερα σμήνη είναι οι «Πλειάδες» ή «Πούλια» (Μ45 στον αστερισμό Ταύρο).

Γαλαξίες. Οι αστέρες αποτελούν μέρη μεγαλύτερων σχηματισμών, των γαλαξιών. Οι γαλαξίες είναι πολλές τάξεις μεγέθους μεγαλύτεροι από τους αστέρες, και οργανώνονται σε σμήνη γαλαξιών. Ο κοντινότερος γαλαξίας στον Γαλαξία μας είναι ο νάνος γαλαξίας του Μεγάλου Κυνός, σε απόσταση περίπου 25.000 ετών φωτός, αλλά ο πλησιέστερος γαλαξίας ορατός με γυμνό μάτι είναι το Μέγα Νέφος του Μαγγελάνου (169.000 έτη φωτός).

Αστερισμοί. Για ευκολότερη αναγνώριση και ανεύρεση των ουράνιων σωμάτων, ο ουρανός χωρίζεται σε 88 τμήματα, ισάριθμων αστερισμών. Οι αστερισμοί που διασχίζει ο ήλιος κατά την εναλλαγή των εποχών (η εκλειπτική) ονομάζονται αστερισμοί του Ζωδιακού Κύκλου.

Μαύρες τρύπες, Αστέρες νετρονίων. Σώματα στα οποία ισχύουν ακρότατες συνθήκες της Φυσικής. Συνήθως προέρχονται από το τελικά στάδιο της εξέλιξης μεγάλων αστέρων.

2.ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

Η σφαιρική τριγωνομετρία ναι μεν είναι ένα ξεχωριστό κομμάτι της βασικής τριγωνομετρίας όμως οι σχέσεις μεταξύ τους δεν παύουν να είναι μεγάλες, οπότε θεωρώ να κάνω μνεία και στην τριγωνομετρία καθαυτού στην παρακάτω ιστορική αναδρομή.

Ο όρος **τριγωνομετρία** καθιερώθηκε το 1595 από τον Γερμανό μαθηματικό Bartholomäus Pitiscus στο έργο του Trigonometria: sive de solutione triangulorum tractatus brevis et perspicuus. Εντούτοις η τριγωνομετρία αναπτύχθηκε και ήταν μέρος των μαθηματικών από την αρχαιότητα. Ο Αρίσταρχος χρησιμοποίησε ορθογώνια τρίγωνα για να υπολογίσει την απόσταση της Γης από τον Ήλιο και την Σελήνη. Οι αστρονόμοι Ίππαρχος και Πτολεμαίος χρησιμοποιούσαν καταλόγους που μετέτρεπαν γωνίες κύκλου σε μήκος χορδής, η γνωστή σε μας τριγωνομετρική συνάρτηση του ημίτονου.

Οι Σουμέριοι αστρονόμοι εισήγαγαν το μέτρο της γωνίας, χρησιμοποιώντας ένα διαχωρισμό του κύκλου σε 360 μοίρες. Αυτοί και οι διάδοχοί τους, οι Βαβυλώνιοι μελέτησαν τις αναλογίες των πλευρών ομοίων τριγώνων και ανακάλυψαν κάποιες ιδιότητες αυτών των αναλογιών, αλλά δεν το μετέτρεψαν σε μια συστηματική μέθοδο για την εύρεση πλευρών και γωνιών των τριγώνων. Οι αρχαίοι Νουβίοι χρησιμοποιούσαν μια παρόμοια μέθοδο. Οι αρχαίοι Έλληνες μετέτρεψαν την τριγωνομετρία σε μια διατεταγμένη επιστήμη.

Κλασικοί Έλληνες μαθηματικοί (όπως ο Ευκλείδης και ο Αρχιμήδης) μελέτησαν τις ιδιότητες των χορδών και των χαραγμένων γωνιών σε κύκλους, και απόδειξαν θεωρήματα που ισοδυναμούν με σύγχρονους τριγωνομετρικούς τύπους παρόλο που τα απεδείκνυαν γεωμετρικά και όχι αλγεβρικά. Ο Κλαύδιος ο Πτολεμαίος διεύρυνε τις χορδές του Ίππαρχου σε ένα κύκλο στην Αλμαγέστη του.

Εδώ θα πρέπει να γίνει μια ιδιαίτερη αναφορά στον πατέρα της σφαιρικής τριγωνομετρίας που δεν είναι άλλος από τον Μενέλαο τον Αλεξανδρινό ο οποίος έζησε και έδρασε τον 1-2 αι. μ.Χ..

Μαθηματικός και μετρητής αστρονόμος αναφέρεται ότι το 98 μ.Χ. έκανε αστρονομικές παρατηρήσεις στην Ρώμη. Από τα γεωμετρικά και αστρονομικά έργα του σώθηκε μόνο ένα με θέμα του τη Σφαιρική γεωμετρία.
Το έργο αυτό είναι προϊόν των εκτεταμένων ερευνών του Μενελάου, φέρει τον τίτλο**"Σφαιρική"** και σώθηκαν μόνο οι μεταφράσεις του στην Αραβική και Εβραϊκή.

Συνοπτικά οι γνωστές μας προσφορές του Μενελάου στα αρχαία μαθηματικά είναι:

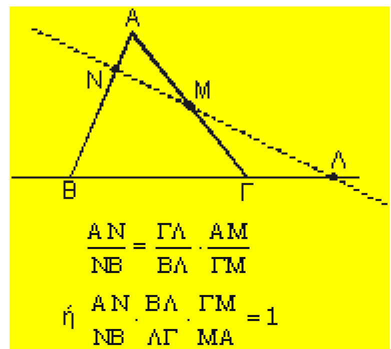
Το έργο "Σφαιρική" σε 3 βιβλία, με περιεχόμενο:

Το πρώτο θεμελιώνει την πρώτη **μη Ευκλείδεια γεωμετρία**, τη Σφαιρική, στην οποία πρωτεύοντα ρόλο παίζουν οι μέγιστοι κύκλοι σφαίρας, ενώ στην Ευκλείδεια γεωμετρία τον έπαιζαν οι ευθείες. Εδώ εισάγονται για πρώτη φορά στην επιστήμη τα **σφαιρικά τρίγωνα** και μελετώνται διάφορες προτάσεις ισότητας και ανισότητας των στοιχείων τους.

Το δεύτερο είναι καθαρά αστρονομικού περιεχομένου, ενώ

Το τρίτο θεμελιώνει τη **Σφαιρική Τριγωνομετρία**.

Στο έργο του αυτό ο Μενέλαος παρουσιάζει πολλές ομοιότητες και αντιστοιχίες των σφαιρικών τριγώνων με τα επίπεδα, τονίζοντας τις εξαιρέσεις.



Το περίφημο **Θεώρημα των διατεμνουσών**, που φέρει το όνομά του. Το θεώρημα αυτό εμφανίζεται στα σφαιρικά τρίγωνα, ως σχέση χορδών των τόξων-πλευρών τους. Του θεωρήματος αυτού ο Μενέλαος δίνει πολλές εφαρμογές. Εκτός αυτού όμως του θεωρήματος, του οποίου το αντίστοιχο επίπεδο πιστεύεται ότι υπήρχε στα "Πορίσματα" του Ευκλείδη, ο σοφός μας δίνει τα σφαιρικά θεωρήματα των τόξων-διχοτόμων των τόξων-υψών και άλλα.

Η συγκρότηση **πινάκων χορδών κύκλου** είναι η τρίτη γνωστή προσφορά του, αν και προϋπήρχε ο αντίστοιχος πίνακας του Ιππάρχου. Οι πίνακες αυτοί περιέχονται στο χαμένο έργο του **"Περί υπολογισμού των χορδών κύκλου"** σε 6 βιβλία, από το οποίο μάλλον άντλησε αργότερα ο Πτολεμαίος.

Σήμερα ο Μενέλαος θεωρείται ως ο κύριος θεμελιωτής της σφαιρικής τριγωνομετρίας, με προ-σφορά του ένα έργο, τη "Σφαιρική", το οποίο αποτελεί την τελική μορφή των προγενέστερων σφαιρικών, με μία σχεδόν πλήρη αναλογία θεωρημάτων προς τα αντίστοιχα της τότε γεωμετρίας του επιπέδου.

Οι Έλληνες αστρονόμοι Ίππαρχος, Μενέλαος και Πτολεμαίος , γνώστες ήδη και της Βαβυλωνιακής Αστρονομίας, εργάσθηκαν επίπονα για να βελτιώσουν την

Αστρονομία και να τη μετασχηματίσουν από απλή περιγραφική σε μαθηματική, δηλαδή με δυνατότητες αναλυτικής σπουδής των φαινομενικών τροχιών των ουρανίων σωμάτων δηλαδή των απλανών αστέρων, του Ηλίου, της Σελήνης και των πέντε τότε γνωστών πλανητών, καθώς και της πρόβλεψης κατόπιν υπολογισμού της θέσης τους συναρτήσει του χρόνου. Στην προσπάθεια αυτή, οι Έλληνες αστρονόμοι αντιμετώπιζαν, εκτός των 9 άλλων, αστρονομικά προβλήματα συνυφασμένα με την επίλυση τριγώνων, είτε επίπεδων
ευθύγραμμων, είτε, ως επί το πλείστον, σφαιρικών δηλαδή επάνω στη σφαιρική επιφάνεια του ουρανίου θόλου. Η σφαιρική τριγωνομετρία προϋποθέτει σφαιρική

γεωμετρία, για παράδειγμα τις ιδιότητες των μεγίστων κύκλων και των σφαιρικών τριγώνων, πολλές εκ των οποίων ήταν ήδη γνωστές, είχαν ερευνηθεί όταν η αστρονομία έγινε μαθηματική επιστήμη, από την εποχή των τελευταίων Πυθαγορείων. Τα «Φαινόμενα» του Ευκλείδη, που βασίζονται σε προγενέστερη εργασία, περιέχουν αρκετή σφαιρική γεωμετρία. Πολλά θεωρήματα ήταν σχεδιασμένα έτσι ώστε να διαπραγματεύονται με τη φαινόμενη κίνηση των άστρων. Ο Θεοδόσιος (20 π.Χ) συγκέντρωσε την υπάρχουσα γνώση της σφαιρικής γεωμετρίας στα «Σφαιρικά» αλλά η εργασία του δεν ήταν αριθμητική και έτσι δεν μπορούσε να δώσει λύση στο βασικό πρόβλημα της Ελληνικής αστρονομίας, δηλαδή τη μέτρηση του χρόνου τη νύχτα με παρατήρηση των αστέρων.

Η επίλυση με γραφική κατασκευή είναι μεν δυνατή θεωρητικά, στην περίπτωση επίπεδων τριγώνων, αλλά δεν μπορεί να γενικευθεί η χρήση της στην πράξη. Ο λόγος είναι, ότι προκύπτουν σε πολλές περιπτώσεις ανακριβείς τιμές λόγω σφαλμάτων σχεδιάσεως, λόγω ανεπάρκειας ή ατελειών των οργάνων σχεδιάσεως κλπ., τα οποία σε πολλές περιπτώσεις (π.χ. γωνίες πολύ μικρές, ή με τιμή που περιέχει πρώτα ή δεύτερα λεπτά της μοίρας , μικρή κλίμακα κ.α.) μπορούν να υπερβούν κατά πολύ τα ανεκτά όρια. Για τα σφαιρικά τρίγωνα δεν συζητείται επίλυση με γραφική κατασκευή.

Όπως γνωρίζουμε, με μόνη την Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν μπορούμε να επιλύσουμε λογιστικά το κάθε τρίγωνο επίπεδο ή σφαιρικό. Έτσι, στην Αστρονομία στην αρχή, άρχισε να διαφαίνεται η ανάγκη ενός πρόσθετου μαθηματικού κλάδου, με τη βοήθεια του οποίου θα μπορούσε να επιλύεται λογιστικά το τυχόν τρίγωνο, επίπεδο ή σφαιρικό, έστω και αν οι προκύπτουσες τιμές των αγνώστων θα ήταν προσεγγιστικές. Ο δρόμος προς την κατεύθυνση αυτή άνοιξε από τη στιγμή, όπου ωρίμασε η ιδέα της εισαγωγής κάποιου τριγωνομετρικού μεγέθους. Οι αρχαίοι Έλληνες χρησιμοποίησαν ένα μονάχα τριγωνομετρικό μέγεθος και συγκεκριμένα την χορδή τόξου κύκλου, η οποία στην αρχαία μαθηματική διάλεκτο αναφέρεται ως «η εν κύκλω ευθεία». Οι δύο Τριγωνομετρίες δηλαδή η Επίπεδη και η Σφαιρική γεννήθηκαν συγχρόνως και αναπτύχθηκαν παράλληλα.

Ο αρχικός αυτός δεσμός Τριγωνομετρίας-Αστρονομίας υπήρξε και διατηρήθηκε τόσο στενός, ώστε επί πολύ καιρό η Τριγωνομετρία εθεωρείτο προσάρτημα της Αστρονομίας. Δείγμα αυτής της αντίληψης είναι το γεγονός, ότι ο Κλαύδιος Πτολεμαίος, στο καθαρά αστρονομικό έργο του «Μαθηματική Σύνταξις», πραγματεύεται στο πρώτο βιβλίο ειδικά την Τριγωνομετρία (Η Αριθμητική και η Γεωμετρία θεωρούνται γνωστές). Στους μετά το 150 μ.Χ. χρόνους η Τριγωνομετρία θα περάσει από πολλά και διάφορα στάδια. Καταρχήν θα παραμείνει μέσα στον ρωμαιοκρατούμενο και φθίνοντα ελληνιστικό κόσμο στάσιμη ή με βραχείες σποραδικές αναλαμπές. Κατόπιν θα μεταναστεύσει σε άλλες χώρες και θα γνωρίσει νέους θεράποντες. Από την Αναγέννηση και κατόπιν θα μετεξελιχθεί με ραγδαία βήματα ,πολλές φορές με άλματα, θα φορέσει καινούργιο «ένδυμα» και θα καταλάβει σπουδαία και επίζηλη θέση μέσα στα σύγχρονα Μαθηματικά, καθώς και σε πολλούς άλλους επιστημονικούς και τεχνολογικούς κλάδους όπως στη Φυσική, Μηχανική, Ηλεκτροτεχνία, Γεωδαισία και Τοπογραφία, Αστρονομία, Ναυτιλία κ.λπ.

Η σύγχρονη ημιτονοειδής συνάρτηση ορίσθηκε για πρώτη φορά στη Surya Siddhanta, και οι ιδιότητές της ήταν τεκμηριωμένες περαιτέρω από τον Ινδό μαθηματικό και αστρονόμο του 5ου αιώνα Αριαμπάτα. Τα ελληνικά και τα Ινδικά αυτά έργα έχουν μεταφραστεί και επεκταθεί από Ισλαμιστές μαθηματικούς του μεσαίωνα. Μέχρι το 10ο αιώνα, οι ισλαμιστές μαθηματικοί χρησιμοποιούσαν και τις έξι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, είχαν ταξινομημένες τις τιμές τους, και τις χρησιμοποιούσαν για τα προβλήματα στη σφαιρική γεωμετρία. Την ίδια περίπου εποχή, Κινέζοι μαθηματικοί ανέπτυξαν την τριγωνομετρία ανεξάρτητα, αν και δεν ήταν σημαντικό πεδίο μελέτης για αυτούς. Η γνώση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και μεθόδων έφτασε στην Ευρώπη μέσω λατινικών μεταφράσεων των έργων των Περσών και αράβων αστρονόμων όπως ο Al Battani και Nasir al-Din al-Tusi. Ένα από τα πρώτα έργα στην τριγωνομετρία από έναν ευρωπαίο μαθηματικό είναι το De Triangulis από τον γερμανό μαθηματικό Regiomontanus του 15ου αιώνα. Η τριγωνομετρία ήταν ακόμα τόσο λίγο γνωστή στην Ευρώπη του 16ου αιώνα που ο Νικόλαος Κοπέρνικος αφιέρωσε δύο κεφάλαια του De Revolutionibus orbium coelestium για να εξηγήσει τις βασικές έννοιες.

Καθοδηγούμενη από τις απαιτήσεις της ναυσιπλοΐας και την αυξανόμενη ανάγκη για ακριβείς χάρτες των μεγάλων περιοχών, η τριγωνομετρία μεγάλωσε σε ένα σημαντικό κλάδο των μαθηματικών. O Bartholomaeus Pitiscus ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε τη λέξη, δημοσιεύοντας την trigonometría του το 1595. Η Gemma Frisius περιέγραψε για πρώτη φορά τη μέθοδο της τριγωνοποίησης η οποία χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στην χωρομέτρηση. Ήταν ο Leonhard Euler ο οποίος ενσωμάτωσε πλήρως τους μιγαδικούς αριθμούς στην τριγωνομετρία.

Εδώ θα πρέπει να αναφέρουμε και τον **John Napier ή Neper (1550-1617 μ.Χ.)**

Είχε σημαντική συμβολή στη Σφαιρική Τριγωνομετρία (Αναλογικοί τύποι Napier

- Πρακτικοί κανόνες για την επίλυση ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων). Επινόησε

επίσης τους λογάριθμους.

Τα έργα του James Gregory τον 17ο αιώνα και του Colin Maclaurin τον 18ο αιώνα ήταν μεγάλη επιρροή στην ανάπτυξη των τριγωνομετρικών σειρών. Επίσης, τον 18ο αιώνα, ο Brook Taylor καθόρισε τη γενική σειρά Taylor.

Οι Άραβες υιοθέτησαν τις τριγωνομετρικές μελέτες των αρχαίων Ελλήνων και των Ινδών και ανάπτυξαν την σφαιρική τριγωνομετρία. Οι μαθηματικοί της Ευρώπης μυήθηκαν στην τριγωνομετρία τον 15ο αιώνα, όταν την εποχή της Αναγέννησης ασχολήθηκαν με τον υπολογισμό βαλλιστικών τροχιών. Ο Γερμανός αστρονόμος Ρεγιομοντάνος σύνταξε μια πεντάτομη διδασκαλία της επίπεδης και σφαιρικής τριγωνομετρία με τίτλο De triangulis omnimodis. Σήμερα ο τρόπος γραφής των τριγωνομετρικών συναρτήσεων βασίζεται κατά μεγάλο βαθμό στα έργα του Όιλερ.

Απόρεια των παραπάνω είναι και η σφαιρική τριγωνομετρία η οποία αποτελεί εν μέρει αντικείμενο της ουράνιας μηχανικής στην αστρονομία και αφορά στην επίλυση σφαιρικών τριγώνων.

Η πρόοδος της **Αστρονομίας** είναι στενά συνδεδεμένη με την εξέλιξη των παρατηρήσεων. Ο άνθρωπος είναι το μόνο πλάσμα στη Γη που σηκώνει το κεφάλι του για να κοιτάξει απευθείας τον ήλιο και τα ουράνια σώματα που φαίνονται τη νύχτα. Η γοητεία που ασκεί ο ουρανός στον άνθρωπο τον οδήγησε στην συστηματοποίηση των παρατηρήσεών του και στην διατύπωση νόμων που εξηγούν φαινόμενα όπως οι φάσεις της σελήνης, η διάρκεια του έτους και η εναλλαγή των εποχών. Οι πρώτοι αστρονόμοι χρησιμοποίησαν ως μέσο παρατήρησης το γυμνό οφθαλμό.

Αρχαιότητα

Η αστρονομία θεωρείται κατ' εξοχήν ελληνική επιστήμη αφού θεμελιώθηκε από τους αρχαίους Έλληνες φιλοσόφους και οι οποίοι έκαναν σημαντικά βήματα στην επιστήμη της Αστρονομίας, όπως το σύστημα του φαινόμενου μεγέθους των αστέρων (που εφαρμόζεται ακόμα), την σφαιρικότητα της γης (Πυθαγόρας, 6ος αιώνας π.Χ.) την πρόταση ηλιοκεντρικού συστήματος (Αρίσταρχος ο Σάμιος 310 - 230 π.Χ.), την μέτρηση της ακτίνας της Γης (Ερατοσθένης, 276 - 192 π.Χ.), την κατάρτιση καταλόγου ουρανίων σωμάτων (Ίππαρχος, 2ος π.Χ. αιώνας), κ.α. Αργότερα η Αλεξανδρινή σχολή δεν αρκείται σε απλές θεωρητικές έρευνες αλλά επιδιώκει και την εκτέλεση των παρατηρήσεων με πολύ μεγάλη ακρίβεια.

Τις θεωρίες και τις παρατηρήσεις των αρχαίων Ελλήνων φιλοσόφων συγκέντρωσε κατά τον 16ο αιώνα ο Κοπέρνικος και τις εμφάνισε σαν δικό του σύστημα.

Άλλοι αρχαίοι λαοί όπως οι Βαβυλώνιοι, οι Αιγύπτιοι ασχολήθηκαν με την Αστρονομία. Γνωρίζουμε επίσης την κατάρτιση ημερολογίων από τους αρχαίους Αιγύπτιους με πρακτικούς σκοπούς, όπως την συστηματοποίηση των καλλιεργειών περί τον Νείλο. Επίσης ο Κλήμης Αλεξανδρείας μας αφηγείται ότι οι πρώτοι που εξάσκησαν την αστρονομία ήταν η Αιγύπτιοι και οι Χαλδαίοι [6]

Μεσαίωνας

Ο Μεσαίωνας υπήρξε περίοδος οπισθοδρόμησης των επιστημών. Ο φόβος της ιεράς εξέτασης, ο σκοταδισμός, απέτρεπε κάθε πρόοδο. Η εγκατάλειψη του ηλιοκεντρικού συστήματος και η καθιέρωση ενός γεωκεντρικού ήταν επιβεβλημένη από τη «Χριστιανική

Ηθική». Ωστόσο κατά την περίοδο του Μεσαίωνα πρόοδος στην Αστρονομία υπήρξε από Άραβες αστρονόμους (όπως ο al-Farghani, 9ος αιώνας μ.Χ.), κείμενά τους μεταφράστηκαν στα λατινικά περί τον 12ο Αιώνα.

Αναγέννηση

Η Αναγέννηση υπήρξε η περίοδος εκρηκτικής εξέλιξης της Αστρονομίας με την διατύπωση του ηλιοκεντρικού συστήματος του Κοπέρνικου (1473-1543), τους νόμους κίνησης του Κέπλερ (1571-1630), τις εργασίες του Γαλιλαίου (1564-1642) και τέλος τους νόμους της δυναμικής του Νεύτωνα (1642-1727). Οι παρατηρήσεις του Τυχό Μπραχέ ή Τύχωνος (1546-1601) ήταν οι σπουδαιότερες πριν την εισαγωγή του τηλεσκοπίου και χρησιμοποιήθηκαν για τη διατύπωση των νόμων του Κέπλερ. Ένα από τα σπουδαιότερα βήματα στην Αστρονομία είναι η εισαγωγή του τηλεσκοπίου από τον Γαλιλαίο. Το τηλεσκόπιο έδωσε μεγάλη προώθηση στην Αστρονομία επιτρέποντας παρατηρήσεις ακριβείας σε ουράνια σώματα που δεν είχαμε την δυνατότητα να παρατηρήσουμε με τον γυμνό οφθαλμό.

Σύγχρονη Ιστορία

Η Παρατηρησιακή Αστρονομία εξακολούθησε να δίνει υλικό με την κατασκευή ισχυρότερων τηλεσκοπίων. Ο Messier (1730-1817) κατήρτησε κατάλογο με τα απομακρυσμένα αντικείμενα όπως Γαλαξίες, Νεφελώματα, κ.ά.. Η εξέλιξη συνέχισε με επιταγχυνόμενα βήματα στην σύγχρονη εποχή του Διαστημικού Τηλεσκοπίου Hubble. Μπορούμε να αναφέρουμε ως ορόσημα τον νόμο του Χαμπλ (1889-1953) για την επέκταση του Σύμπαντος, τις θεωρίες της σχετικότητας (ειδική και γενική) του Άλμπερτ Αϊνστάιν (1879-1955), την εφεύρεση του ραδιοτηλεσκοπίου και την έναρξη της εξερεύνησης του διαστήματος.

3.ΕΠΙΛΥΣΕΙΣ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Επίλυση σφαιρικού τριγώνου λέγεται ο υπολογισμός των κύριων στοιχείων του, όταν δίνονται ορισμένα από αυτά.

3.1 ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Γνωρίζοντας ότι ***ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο*** λέγεται εκείνο του οποίου μία γωνία είναι ορθή.

Σε ένα τέτοιο τρίγωνο ΑΒΓ θεωρούμε συνήθως ως ορθή τη γωνία Α και ισχύουν γι’ αυτό οι δέκα βασικοί τύποι, τους οποίους μελετήσαμε.

Οι τύποι αυτοί μας βοηθούν να υπολογίσομε τα άγνωστα στοιχεία ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, όταν μας δοθούν δύο στοιχεία του (εκτός βέβαια της ορθής γωνίας).

Νωρίτερα αναφερθήκαμε στους μνημονικούς κανόνες (κανόνες Napier) που μας βοηθούν να βρίσκομε κάθε τύπο χωρίς να είμαστε αναγκασμένοι να τους απομνημονεύομε.

Η θεωρία του ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου παρουσιάζει ορισμένες δυσκολίες που δεν τις συναντούμε στα επίπεδα ορθογώνια τρίγωνα, όπως π.χ. το πρόβλημα της εκλογής μεταξύ δύο γωνιών μικρότερων από 180° που αντιστοιχούν σε ένα ημίτονο και το ημίτονο αυτό είναι από τα ζητούμενα στοιχεία και το υπολογίζομε. Γι’ αυτό παραθέτομε εδώ δύο βασικά θεωρήματα, τα λεγάμενα ***θεωρήματα των τεταρτημόριων,*** τα οποία μας βοηθούν να εκλέξομε π.χ. την οξεία ή την αμβλεία γωνία, οι οποίες αντιστοιχούν σε ένα υπολογιζόμενο ημίτονο.

3.2 ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΤΩΝ ΤΕΤΑΡΤΗΜΩΡΙΩΝ

Θεώρημα 1,

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο μία γωνία (όχι βέβαια η ορθή) και η απέναντι της πλευρά ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Έτσι η γωνία Β και η πλευρά β (και αντίστοιχα η γωνία Γ και η πλευρά γ) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

Απόδειξη.

Ο πέμπτος τύπος από τους βασικούς μας δίνει:

$$\eta\mu\Gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu B}{\sigma\upsilon\nu\beta}$$

Επειδή Γ <180° => ημΓ > 0. Άρα τα συνβ και συνΒ είναι ή και τα δύο θετικά (οπότε β και Β μικρότερα από 90°) ή και τα δύο αρνητικά (οπότε 6 και Β μεγαλύτερα από 180°).

Παρατήρηση: Δεν πρέπει να ξεχνάμε ότι οποιαδήποτε πλευρά ή γωνία σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° συνεπώς ανήκει ή στο πρώτο ή στο δεύτερο τεταρτημόριο.

Θεώρημα 2.

Αν η υποτείνουσα ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου ανήκει στο πρώτο τεταρτημόριο, τότε οι δύο άλλες πλευρές του (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες του) ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο και αντίστροφα.

Όταν όμως η υποτείνουσα ανήκει στο δεύτερο τεταρτημόριο, τότε οι δύο άλλες πλευρές του (αντίστοιχα οι δύο άλλες γωνίες του) ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια και αντίστροφα.

Δηλαδή: Αν α < 90° =?> β < 90° και γ < 90° (αντίστοιχα Β < 90° και Γ < 90°) ή β > 90° και γ > 90° (αντίστοιχα Β > 90° και Γ > 90°). Αν όμως α > 90° => β > 90° και γ < 90° (αντίστοιχα Β > 90° και Γ < 90°.

Απόδειξη.

Ο τέταρτος τύπος από τους βασικούς μας δίνει:

συνα = συνβσυνγ

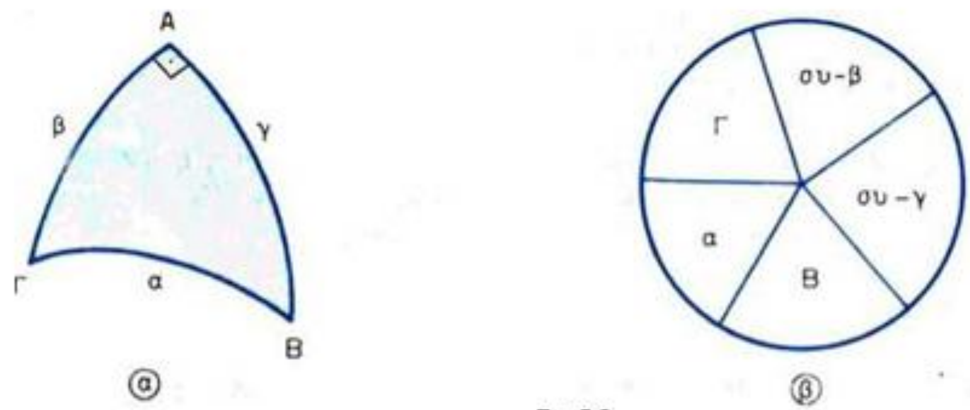
α) Αν α < 90° => συνα > 0 άρα τα συνβ και συνγ είναι ή και τα δύο θετικά (οπότε 8 < 90° και γ < 90°) ή και τα δύο αρνητικά (οπότε β > 90° και γ > 90°) δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις τα α και 6 ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο.

β) Αν α > 90° => συνα < 0 άρα τα συνβ και συνγ έχουν διαφορετικά πρόσημα συνεπώς τα α και β ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

3.3 ΚΑΝΟΝΕΣ ΤΟΥ NAPIER

Επειδή η απομνημόνευση των δέκα βασικών τύπων των ορθογώνιών σφαιρικών τριγώνων είναι κάπως δύσκολη, ο NAPIER επινόησε ένα μνημονικό τέχνασμα, με το οποίο μπορούμε να βρίσκομε οποιονδήποτε από αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς ο οποίος μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση.Το τέχνασμα αυτό αποτελείται από δύο κανόνες οι οποίοι ονομάζονται κανόνες του NAPIER. Για την εύκολη διατύπωση τους σχηματίζομε πρώτα ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο [σχ. 5.3(α)] ΑΒΓ και κατόπιν δίπλα του ένα κύκλο που τον διαιρούμε σε πέντε τομείς [(σχ. 5.3(6)].

Σε κάθε τομέα τοποθετούμε και από ένα στοιχείο του τριγώνου κατά τον ίδιο κυκλικό τρόπο, κατά τον οποίο τα στοιχεία αυτά αναγράφονται και στο τρίγωνο. Αγνοώντας εντελώς την ορθή γωνία Α και αντί των προσκειμένων της πλευρών 6 και γ θέτομε τα σύμβολα συ-β και συ-γ, όπου συ-β σημαίνει 90° - β και συ-γ σημαίνει 90° - γ. Αυτό σημαίνει ότι αντί των β και γ λαμβάνομε τα συμπληρωματικά τους.



Σχ. 5.3.

Αν τώρα θεωρήσομε οποιοδήποτε στοιχείο ενός τομέα, το οποίο ονομάζομε μεσαίο στοιχείο, τότε τα στοιχεία των τομέων που βρίσκονται εκατέρωθέν του τα ονομάζομε προσκείμενα στοιχεία του, ενώ τα στοιχεία των άλλων δύο τομέων, που δεν είναι εκατέρωθέν του, τα ονομάζομε απέναντι στοιχεία. Έτσι π.χ. του στοιχείου Β [σχ. 5.3(6)] προσκείμενα στοιχεία είναι τα α και συ-γ, ενώ απέναντι στοιχεία του είναι τα Γ και συ-β. Το στοιχείο Β όπως είπαμε το ονομάζομε μεσαίο.

Οι κανόνες του NAPIER είναι οι εξής:

Κανόνας 1ος.

Το συνημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου (μεσαίο) ισούται με το γινόμενο των συνεφαπτομένων των προσκειμένων στοιχείων.

Κανόνας 2ος.

Το συνημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου (μεσαίο) ισούται με το γινόμενο των ημιτόνων των απέναντι στοιχείων.

Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

Αν λάβομε το στοιχείο α [σχ. 5.3(6)] ως τυχόν στοιχείο (μεσαίο), τότε προσκείμενα στοιχεία του είναι τα Β και Γ και απέναντι τα συ-β, συ-γ. Χρησιμοποιώντας τον 1ο κανόνα έχομε:

συνα = σφΒσφΓ (1)

Χρησιμοποιώντας το 2ο κανόνα έχομε:

συνα = ημ(συ-β)ημ(συ-γ) =>

συνα = συνβσυνγ (2)

Παράδειγμα 2.

Αν λάβομε το στοιχείο συ-γ ως τυχόν (μεσαίο), τότε προσκείμενα στοιχεία του είναι τα Β και συ-β και απέναντι τα α και Γ.

Από τον 1ο κανόνα έχομε:

συν(συ-γ) = σφ(συ-β)σφΒ =>

ημγ = εφβσφΒ (3)

Από το 2ο κανόνα έχομε:

συν(συ-γ) = ημαημΓ =>

ημγ = ημαημΓ (4)

Παρατηρούμε ότι οι τύποι (1), (2), (3), (4) που προέκυψαν από τα παραδείγματα 1 και 2, είναι μερικοί από τους δέκα βασικούς τύπους ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων. Συνεπώς ενεργώντας όπως στα παραδείγματα αυτά για κάθε ένα στοιχείο (θεωρώντας το σαν μεσαίο) μπορούμε, με τους κανόνες του NAPIER, να βρούμε και τους δέκα βασικούς τύπους.

3.4 ΓΕΝΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΩΝ ΣΦΑΙΡΙΚΩΝ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

Για να επιλυθεί ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να μας δοθούν δύο στοιχεία του, αφού η μία γωνία του είναι γνωστή (ορθή). Τα υπόλοιπα τρία στοιχεία μπορούν να υπολογισθούν με τη βοήθεια των δέκα βασικών τύπων των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων.

Κατά την επίλυση οφείλομε να έχομε υπόψη μας τους παρακάτω κανόνες:

1) Σχεδιάζομε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο αναγράφοντας τα στοιχεία του και δίπλα σχεδιάζομε ένα κύκλο με τους πέντε τομείς βάζοντας μέσα τα στοιχεία του τριγώνου, όπως ακριβώς στα σχήματα [5.3(α)] και [5.3(6)].

2) Εφαρμόζοντας τον κατάλληλο κανόνα του NAPIER, εκλέγομε τρεις τύπους, από τους οποίους ο καθένας να περιέχει ένα από τα άγνωστα στοιχεία και δύο από τα γνωστά. Το μεσαίο μεταξύ των αγνώστων στοιχείων το υπολογίζομε τελευταίο.

3) Αποφεύγομε να χρησιμοποιούμε ένα στοιχείο που υπολογίσαμε, για τον υπολογισμό ενός άλλου στοιχείου.

4) Εκλέγομε ένα τύπο, ο οποίος να περιέχει τα τρία άγνωστα στοιχεία και ο οποίος θα χρησιμοποιηθεί για την επαλήθευση του υπολογισμού που κάναμε (τύπος επαληθεύσεως).

5) Απευθυνόμαστε στα θεωρήματα των τεταρτημόριων ειδικά, όταν πρέπει να προσδιορίσομε ένα στοιχείο από το ημίτονο του.

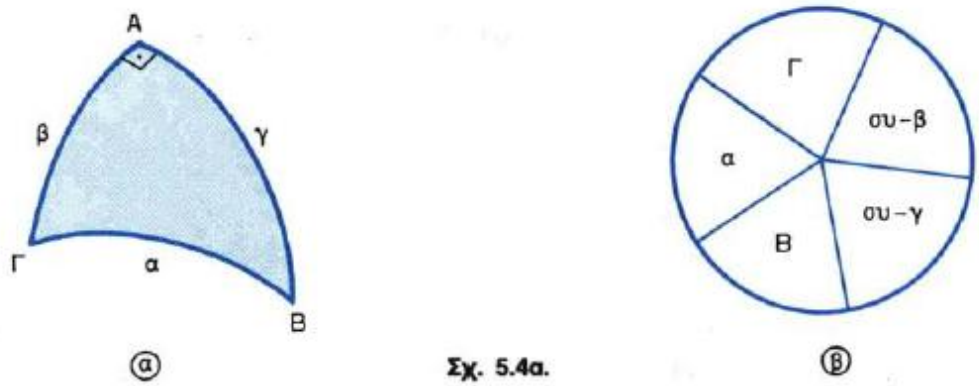
Δίνομε παρακάτω ορισμένα παραδείγματα-ασκήσεις επιλύσεως ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων καθώς και τον τρόπο αναγραφής των πράξεων και αποτελεσμάτων στο φύλλο υπολογισμού.

Παράδειγμα 1.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ όταν δίνονται $\beta = 46° \ 12{,}3'$ και $\alpha = 75° \ 48{,}6'$.

Λύση.

Σχηματίζομε ένα ορθογώνιο τρίγωνο και τον αντίστοιχο κύκλο με τους πέντε τομείς (σχ. 5.4α).



Σχ. 5.4α.

1) Υπολογισμός της Β.

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-θ με το άγνωστο Β. Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο συ-β πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα α και Β. Άρα θάσει του 2ου κανόνα του NAPIER θα έχομε:

συν(συ-θ) = ημαημΒ =ï>

ημβ = ημαημΒ

και λύνοντας ως προς το άγνωστο στοιχείο Β παίρνομε:

ημΒ = ημβστεμα

=ï> λογημΒ = λογημβ + λογστεμα

2) Υπολογισμός της Γ.

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-6 με το άγνωστο Γ. Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο Γ πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με προσκείμενα του στοιχεία το α και συ-β. Άρα βάσει του 1ου κανόνα του NAPIER θα έχομε:

συνΓ = σφασφ(συ-β) => συνΓ = σφαεφβ (2)

=> λογσυνΓ = λογσφα + λογεφβ (2')

3) Υπολογισμός της γ.

Πρέπει να συνδυάσομε τα γνωστά στοιχεία α και συ-β με το άγνωστο γ. Βλέπομε από τους τομείς ότι το στοιχείο α πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα συ-β και συ-γ. Άρα βάσει του 2ου κανόνα του NAPIER θα έχομε:

συνα = ημ(συ-β)ημ(συ-γ) => συνα = συνβσυνγ και λύνοντας ως προς το άγνωστο στοιχείο θα έχομε:

$$\text{συν}\gamma = \frac{\text{συν}\alpha}{\text{συν}\beta} \Rightarrow$$

$$\text{συν}\gamma = \text{συν}\alpha\,\text{τεμ}\beta$$

$$\Rightarrow \text{λογ συν}\gamma = \text{λογσυν}\alpha + \text{λογτεμ}\beta$$

Τύπος επαληθεύσεως.

Για να βρούμε τον τύπο επαληθεύσεως συνδυάζομε τα τρία άγνωστα στοιχεία Β, Γ, γ. Από τους τομείς παρατηρούμε ότι το στοιχείο Γ πρέπει να θεωρηθεί μεσαίο με απέναντι του στοιχεία τα Β και συ-γ, οπότε βάσει του 2ου κανόνα του NAPIER θα έχομε:

συνΓ = ημΒημ(συ-γ) =>

συνΓ = ημΒσυνγ (4)

=> λογσυνΓ = λογημΒ + λογσυνγ (4')

Η κατάταξη τώρα των πράξεων στο φύλλο υπολογισμού γίνεται όπως φαίνεται αμέσως παρακάτω. Σε πρώτη στήλη τοποθετούμε πρώτα τα γνωστά στοιχεία και κατόπιν τα άγνωστα. Σε επόμενες στήλες με επικεφαλίδες τα άγνωστα στοιχεία τοποθετούμε τους λογάριθμους των αντίστοιχων τριγωνομετρικών αριθμών που μας υποδεικνύουν οι τύποι (1), (2), (3) και (4) έτσι, ώστε προσθέτοντας και απολογαριθμίζοντας να βρίσκομε τα ζητούμενα.

ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

	Β	γ	Γ
β = 46° 12,3΄	λογημβ = 9,85843	λογτεμβ = 0,15984	λογεφβ = 0,01827
α = 75° 48,6΄	λογστεμα = 0,01346	λογσυνα = 9,38941	λογσφα = 9,40297
Β = 48° 7,2΄ ←	← λογημΒ = 9,87189		
γ = 69° 15,3΄ ←	← λογσυνγ = 9,54925 ←	← λογσυνγ = 9,54925	
Γ = 74° 42,5΄ ←	← λογσυν = 9,42114 ←	← (έλεγχος) ←	← λογσυνΓ = 9,42114

Μόνο η τιμή Β = 48°7,2' είναι αποδεκτή (και όχι η παραπληρωματική της) διότι τα β και Β ανήκουν το ίδιο τεταρτημόριο.

Παρατήρηση: Βλέπομε ότι η επαλήθευση γίνεται καθώς διαπιστώνομε ότι το άθροισμα των γραμμών της τελευταίας στήλης είναι ίδιο με το άθροισμα της τρίτης και τέταρτης γραμμής της δεύτερης στήλης.

Παράδειγμα 2.

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, του οποίου γνωρίζομε τη γωνία Β = 65° και τη γωνία Γ = 118° (σχ. 5.4β).

Λύση.

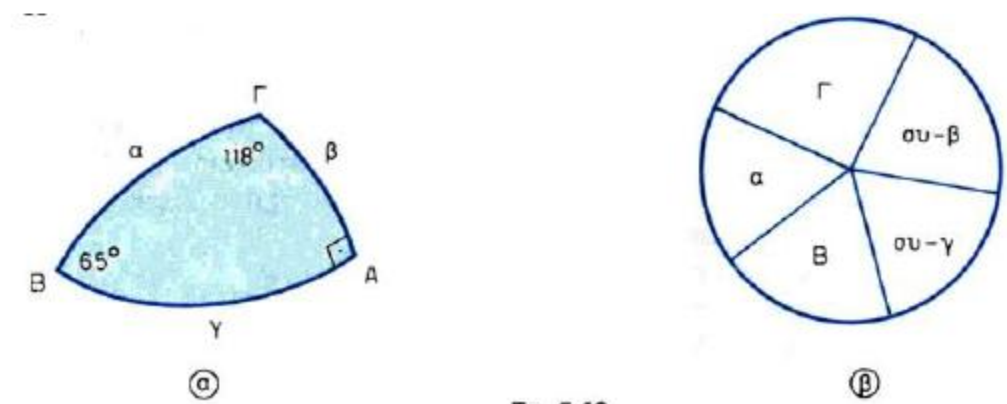
1) Υπολογισμός της β.

Εργαζόμαστε όπως και στο προηγούμενο παράδειγμα. Θεωρούμε τα στοιχεία συ-β, Β, Γ. Μεσαίο είναι το Β, άρα:

συνΒ = ημΓημ(συ-β) => συνΒ = ημΓσυνθ

Λύνομε ως προς συνβ:

$$\text{συνθ} = \frac{\text{συνΒ}}{\text{ημΓ}} \Longrightarrow \text{συνθ} = \text{συνΒστεμΓ}$$



Σχ. 5.46.

=> λογσυνθ = λογσυνΒ + λογστεμΓ (1')

2) Υπολογισμός της γ.

Θεωρούμε τα συ-γ, Β, Γ. Μεσαίο είναι το Γ και τα άλλα απέναντι, άρα:

συνΓ = ημΒημ(συ-γ) -> συνΓ = ημΒσυνγ

Λύνομε ως προς συνγ:

συνΓ

συνγ = συνΓ/ημΒ => συνγ = συνΓστεμΒ (2)

=> λογσυνγ = λογσυνΓ + λογστεμΒ (2')

3) Υπολογισμός της α.

θεωρούμε τα στοιχεία α, Β, Γ. Μεσαίο είναι το α και τα άλλα προσκείμενα. Άρα:

συνα = σφΒσφΓ (3)

=> λογσυνα = λογσφΒ + λογσφΓ (3')

4) Τύπος επαληθεύσεως.

Συνδυάζομε τα τρία άγνωστα στοιχεία α, συ-β, συ-γ. Μεσαίο είναι το α και τα άλλα απέναντι, άρα:

συνα = ημ(συ-β)ημ(συ-γ) => συνα = συνβσυνγ

ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

	β	γ	α
Β = 65°	λογσυνΒ = 9,62595	λογστεμΒ = 0,04272	λογσφΒ = 9,66867
Γ = 118°	λογστεμΓ = 0,05407	λογσυνΓ = 9,67161(–)	λογσφΓ = 9,72568(–)
β = 61°24,2'	λογσυνβ = 9,68002		
γ = 121° 11' ←	λογσυνγ = 9,71433(–) →	λογσυνγ = 9,71433(–)	
α = 104° 21' ←	λογσυνα = 9,39435(–) ←	(έλεγχος)	λογσυνα = 9,39435(–)

Παρατήρηση 1, Το σύμβολο (-) που παρατίθεται σε ένα λογάριθμο σημαίνει ότι ο αντιλογάριθ- μος είναι αρνητικός. Η απουσία αυτού του συμβόλου σημαίνει ότι ο αντίλογόριθμος είναι θετικός. Εδώ στο παράδειγμα μας από τον τύπο (1) παρατηρούμε ότι επειδή το συνΒ και η στεμΓ είναι θετικό, και το γινόμενο τους θα είναι θετικό, άρα και το συνβ είναι θετικό και συνεπώς 6 < 90°. Από τον τύπο (2) παρατηρούμε ότι το συνΓ είναι αρνητικό (διότι Γ = 11β° > 90°), ενώ η στεμΒ είναι θετική, άρα το γινόμενο τους αρνητικό, συνεπώς και το συνγ είναι αρνητικό, άρα γ > 0.

Από τον τύπο (3) παρατηρούμε ότι η σφ Β είναι θετική, ενώ η σφΓ είναι αρνητική, άρα το γινόμενο τους είναι αρνητικό, δηλαδή το συ να < 0 και άρα α > 90°.

Παρατήρηση Ζ Με την παραπάνω παρατήρηση 1 μπορούμε να έχομε υπόψη μας τον εξής πρακτικό κανόνα: «Αν στο ψύλλο υπολογισμού και μόνο στα δεδομένα στοιχεία υπάρχει το σύμβολο (-) σε ένα απ' αυτά, ενώ στο άλλο δεν υπάρχει [άρα υποτίθεται ότι υπάρχει το {+)], τότε είναι σαν να λέμε (+) επί (-) ίσον (-). Στο αποτέλεσμα λοιπόν παραθέτομε δίπλα το (-) και η προς υπολογισμό γωνία (ή πλευρά) λαμβάνεται μεγαλύτερη από 90°».

Βέβαια αυτό δεν ισχύει όταν πρόκειται το άγνωστο στοιχείο να υπολογισθεί με ημίτονο (γιατί από 0° έως 180° υπάρχουν δυο γωνίες με το ίδιο ημίτονο).

Παρατήρηση 3. Μπορούμε γενικά να παρατηρήσομε ότι κατά τις επιλύσεις των ορθογωνίων σφαιρικών τριγώνων, όταν ένα άγνωστο στοιχείο παρέχεται από συνημίτονο, εφαπτομένη ή συνεφαπτομένη, βρίσκομε μία μόνο τιμή του. Όταν όμως παρέχεται από ημίτονο, βρίσκομε δύο τιμές του.

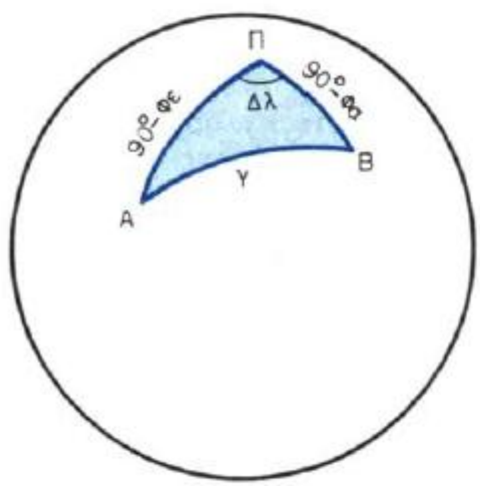
4. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΝΑΥΤΙΛΙΑ

4.1 Τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο).

Η θεωρία της Σφαιρικής Τριγωνομετρίας έχει άμεση εφαρμογή σε προβλήματα της γήινης σφαίρας καθώς και της ουράνιας.

Μια πρώτη εφαρμογή της είναι στο λεγόμενο τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο).

Τρίγωνο ορθοδρομίας (ή γήινο τρίγωνο) είναι το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ (σχ. 6.1), το οποίο βρίσκεται επάνω στην επιφάνεια της γης και σχηματίζεται μεταξύ του τόπου εκκινήσεως Α ενός πλοίου, του τόπου αφίξεως Β και του πόλου Π της γης ο οποίος είναι ομώνυμος προς το πλάτος εκκινήσεως.



Σχ. 6.1.

Οι πλευρές του τριγώνου ορθοδρομίας πρέπει βεβαίως να είναι τόξα μεγίστων κύκλων και επειδή οι πλευρές του ΠΑ και ΠΒ ως τόξα των μεσημβρινών των αντιστοίχων τόπων Α και Β, είναι τόξα μεγίστων κύκλων, για να είναι και η πλευρά ΑΒ τόξο μεγίστου κύκλου θα πρέπει ο πλούς να είναι ορθοδρομικός (§ 6.2).

Στοιχεία του τριγώνου ορθοδρομίας είναι λοιπόν τα εξής:

α)Το τόξο ΠΑ του μεσημβρινού του τόπου εκκινήσεως, το οποίο ισούται με 90°-φε (όπου φε το πλάτος του τόπου εκκινήσεως Α).

6) Το τόξο ΠΒ του μεσημβρινού του τόπου αφίξεως, που ισούται με 90°-φα (όπου φα το πλάτος του τόπου αφίξεως Β), αν τα φε και φα είναι ομώνυμα και με 90° + φα αν φε και φα είναι ετερώνυμα. γ) Η ορθοδρομική απόσταση γ (§ 6.2) των δύο τόπων.

Γώνιες.

α) Η γωνία Π, η οποία ισούται με τη διαφορά μηκών Δλ μεταξύ των τόπων Α και Β.

β) Η γωνία Α, που αποτελεί την αρχική πλεύση.

γ) Η γωνία Β, από την οποία βρίσκεται η τελική πλεύση. (Η τελική πλεύση είναι στοιχείο άχρηστο στην πράξη και σπάνια χρησιμοποιείται από τους ναυτικούς).

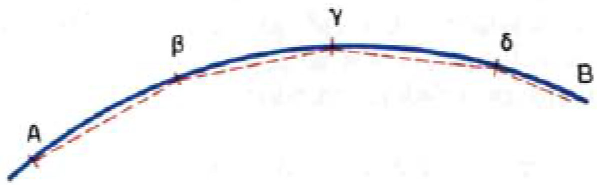
4.2 Ορθοδρομία (GREAT CIRCLE SAILING).

Λέγεται το μικρότερο από 180° τόξο του μέγιστου κύκλου, που συνδέει δυο τόπους (σημεία).

Όπως γνωρίζομε από τη Σφαιρική Τριγωνομετρία, το τόξο αυτό του μέγιστου κύκλου είναι το ελάχιστο από τα άπειρα τόξα που συνδέουν τους δυο αυτούς τόπους. Η ορθοδρομία λοιπόν αποτελεί τη συντομότερη απόσταση μεταξύ δυο τόπων επάνω στην επιφάνεια της γης. Το τόξο αυτό λέγεται και ορθοδρομικό τόξο και κατά την ορθοδρομική πλεύση προσπαθούμε να κινηθούμε όσο το δυνατό επάνω σ' αυτό.

Το μέτρο του ορθοδρομικού τόξου σε πρώτα μοίρας μας δίνει την ορθοδρομική απόσταση σε ναυτικά μιλιά. Χαρακτηριστικό της ορθοδρομίας είναι ότι στρέφει το κυρτό της προς τους πόλους και το κοίλο της προς τον ισημερινό.

Επειδή οι μεσημβρινοί της γης δεν είναι παράλληλοι μεταξύ τους, αλλά συγκλίνουν καιτέμνονται στους πόλους, η ορθοδρομία τους τέμνει με διαρκώς μεταβαλλόμενη γωνία (κάθε μια από αυτές αντιπροσωπεύει την αντίστοιχη ορθοδρομική πλεύση). Επομένως, για να ακολουθήσομε ορθοδρομική πλεύση, πρέπει να μεταβάλλομε συνεχώς την πορεία του πλοίου. Επειδή όμως αυτό στην πράξη είναι αδύνατο, ακολουθούμε μια τεθλασμένη γραμμή που εγγρά- φομε στο ορθοδρομικό τόξο (σχ. 6.2). Φυσικά όσο περισσότερες είναι οι πλευρές της τεθλασμένης γραμμής, τόσο περισσότερο αυτή προσεγγίζει το ορθοδρομικό τόξο. Ο πλούς επάνω στην τεθλασμένη αυτή γραμμή, κοντά στο ορθοδρομικό τόξο, λέγεται ορθοδρομικός πλούς.



Σχ. 6.2.

4.3 Λοξοδρομία (RHUMBLINE).

Λέγεται η καμπύλη που συνδέει δυο τόπους (σημεία) της γήινης επιφάνειας και τέμνει τους μεσημβρινούς υπό σταθερή γωνία. Χαρακτηριστικό της είναι ότι ανέρχεται σπειροειδώς σε υψηλότερα πλάτη, χωρίς ποτέ να φθάνει στους πόλους, γιατί παραμένει ασύμπτωτη προς αυτούς. Θεωρητικά έχει αποδειχθεί ότι μεταξύ δυο σημείων της γης διέρχονται άπειρες λοξοδρομίες. Όταν η απόσταση δυο τόπων μετρείται επί της λοξοδρομικής καμπύλης, ονομάζεται λοξοδρομική απόσταση των τόπων αυτών. Η σταθερή γωνία, με την οποία τέμνονται οι μεσημβρινοί από την καμπύλη αυτή, λέγεται λοξοδρομική ή μερκατορική πορεία.

Επειδή η λοξοδρομία δεν είναι τόξο μέγιστου κύκλου, οι υπολογισμοί σχετικά με αυτήν δεν απασχολούν τη Σφαιρική Τριγωνομετρία.

4.4 Υπολογισμός ορθοδρομικής αποστάσεως ΑΒ και αρχικής πλεύσεως Ζλε.

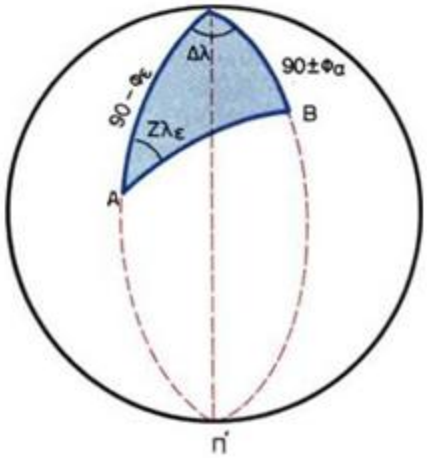
Έστω δυο τόποι Α και Β επάνω στη γη, από τους οποίους ο Α είναι το σημείο εκκινήσεως με συντεταγμένες φε και λε και ο Β το σημείο σφίξεως με συντεταγμένες φα και λα. Αν θέλομε να υπολογίσομε την ορθοδρομική απόσταση μεταξύ των σημείων Α και Β καθώς και την αρχική πλεύση Ζλε, στο σχηματιζόμενο τρίγωνο ορθοδρομίας ΠΑΒ (σχ. 6.4α) γνωρίζομε:

α) Την πλευρά ΠΑ ίση με 90°- φε.

β) Την πλευρά ΠΒ ίση με 90°- φα αν φε και φα είναι ομώνυμα ή με 90°+φα αν φα και φε είναι ετερώνυμα.

γ) Τη γωνία Δλ ίση με τη διαφορά μήκους των δυο τόπων.

Επομένως μας δίνονται δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία (περίπτωση ΙΙΙ), οπότε επιλύοντας το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΒ υπολογίζομε τα ζητούμενα στοιχεία.



Σχ. 6.4α.

Παράδειγμα.

Να ευρεθεί η ορθοδρομική απόσταση και η αρχική πλεύση από τη Χονολουλού (πλάτος φε = 21° 18,3' Β, μήκος λε = 157° 52,3' Δ) στο Σαν Φραντζίσκο (πλάτος φα = 37° 47,5' Β μήκος λ,, = 122° 25,7' Δ).

Λύση.

1ος τρόπος.

Στο σχήμα 6.46 έστω ότι στο Α βρίσκεται η Χονολουλού και στο Β το Σαν Φραντζίσκο.

Έχομε:

α = 90°- 37° 47,5' = 52° 12,5' ( ) β = 90°- 21° 18,3' = 68° 41,7' και Γ = Δλ = 157° 52,3-122° 25,7' = 35°26,6'

Εφαρμόζοντας τους τύπους των ημιπαρημιτόνων πλευρών και εργαζόμενοι όπως και στην περίπτωση ΙΙΙ (§ 5.7.4, 2ος τρόπος) υπολογίζομε αμέσως την πλευρά γ, δηλαδή την ορθοδρομική απόσταση. Έχομε:

ημπργ = ημπρ(α - β) + ημαημβημπρΓ (1)

όπου τα α, 6, Γ είναι γνωστά.

Θέτομε: ημπρΧ = ημαημβημπρΓ (2)

οπότε ' ημπργ= ημπρ(α-β) + ημπρΧ (3)

Από την (2) =?> λογημπρΧ = λογημα + λογημβ + λογημπρΓ λογημα = 9,89776 λογημβ = 9,96926 λογημπρΓ = 8,96687

λογημπρΧ = 8,83389 =£> ημπρΧ = 0,06822

και επειδή βρίσκομε:

ημπρ (α~6) = ημπρ (16° 29,2') = 0,02056 η (3) γράφεται:

ημπργ = 0,020506 + 0,06822 => ημπργ = 0,08878

=> γ = 34° 40,2*

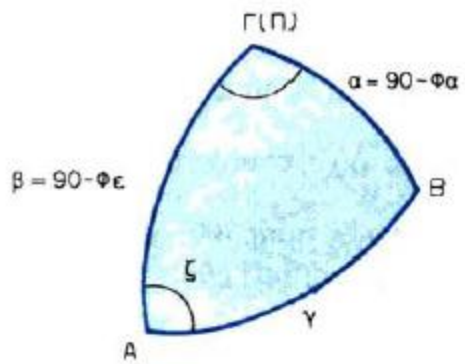
Για την αρχική πλεύση θα πάρομε τον τύπο:

ημπρΑ = ημ(τ-β)ημ(τ-γ)στεμβστεμγ

Άρα

$$\begin{aligned}
\tau - \beta &= 9^\circ\ 5{,}5' &&\Longrightarrow \lambda o\gamma\eta\mu(\tau-\beta) = 9{,}19870\\
\tau - \gamma &= 43^\circ\ 7' &&\Longrightarrow \lambda o\gamma\eta\mu(\tau-\gamma) = 9{,}83473\\
\beta &= 68^\circ\ 41{,}7' &&\Longrightarrow \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\beta = 0{,}03074\\
\gamma &= 34^\circ\ 40{,}2' &&\Longrightarrow \lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\gamma = \underline{0{,}24500}\\
& && \lambda o\gamma\eta\mu\pi\rho A = 9{,}30917\\
& &&\Longrightarrow A = 53^\circ\ 40{,}2'
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε (-) γιατί τα πλάτη $Φ_ε$ $Φ_α$ είναι ομώνυμα.



Σχ. 6.46.

2ος τρόπος.

Το δεύτερο αυτόν τρόπο εφαρμόζουν συνήθως οι ναυτιλλόμενοι σε τέτοιες περιπτώσεις. Είναι μια πιο τυποποιημένη μέθοδος, όπου για μεν την εύρεση της ορθοδρομικής αποστάσεως εργαζόμαστε όπως ακριβώς στον προηγούμενο τρόπο, για δε την εύρεση της αρχικής πλεύσεως χρησιμοποιούμε τον τύπο του ημιπαρημιτόνου γωνίας.

Έτσι θέτομε (σχ. 6.46) στους αντίστοιχους τύπους, όπου Α = ζ, α = 90 ± φα [το + για πλάτη ετερώνυμα, το - (πλην) για πλάτη ομώνυμα] και το 6 = 90 - φε, Γ = Δλ, γ = ΑΒ και έχομε:

1) Εύρεση ορθοδρομικής αποστάσεως γ.

Θεωρούμε τον τύπο:

ημπργ = ημπρ(α~β) + ημπρΓημαημβ

και αντικαθιστώντας παίρνομε:

ημπργ = ημπρ[(90 - φα) - (90 -φε)] + ημπρΔλημ(90 - φα)ημ(90 - φε)

=ï> ημπργ = ημπρ(φε~φα) + ημπρΔλσυνφασυνφε (1)

Θέτομε: ημπρΧ = ημπρΔλσυνφασυνφε (2)

οπότε ημπργ = ημπρ(φε~φα) + ημπρΧ (3)

από τη (2) => λογημπρΧ = λογημπρΔχ + λογσυνφα + λογσυνφε

Άρα:

Δλ = 35°26,6' =ï> λογημπρΔχ = 8,96687 λογσυνφα = 9,89776 λογσυνφε = 9,96926

λογημπρΧ = 8,83389 => ημπρΧ = 0,06822

και επειδή βρίσκομε:

ημπρ(φε~φα) = ημπρ(16° 29,2') = 0,02056 η (3) γράφεται:

ημπργ = 0,02056 + 0,06822 => ημπργ = 0,08878

=> γ = 34° 40,2' = 2080,2' = 2080,2 μίλια.

2) Εύρεση αρχικής πλεύσεως. θεωρούμε τον τύπο:

ημπρΑ = [ημπρα ~ ημπρ(β ~ γ)] στεμβστεμγ

στον οποίο θέτομε τα αντίστοιχα στοιχεία, οπότε αυτός γράφεται:

ημπρζ = [ημπρ(90-φα) ~ ημπρ[(90 - φε) - γ]στεμ(90 - φε)στεμγ ημπρζ = [ημπρ(90 - φα) ~ ημπρ [(90 - φε) - γ]] τεμφεστεμγ (1)

θέτομε:

ημπρΧ = ημπρ(90 - φα) ~ ημπρ[(90 - φε) - γ] (2)

Επειδή 90-φα= 52° 12,5' και ημπρ 52° 12,5' = 0,19360 90 - φε = 68° 41,7'

(90-φε)-γ = 34° 1,5' και ημπρ 34° 1,5' = 0,08560 η (2) γράφεται:

ημπρΧ = ημπρ(52° 12,5') ~ ημπρ34° 1,5'

=> ημπρΧ = 0,19360 - 0,08560 = 0,10800 οπότε η (1) γράφεται:

ημπρζ = ημπρΧτεμφε στεμγ => (3)

λογημπρζ = λογημπρΧ + λογτεμφε + λογστεμγ (4)

Άρα:

ημπρΧ = 0,10800 => λογημπρΧ = 9,03343

λογτεμφε = 0,03074 λογστεμγ = 0,24500

λογημπρζ = 9,30917

=> ζ. = 53° 40,2'

4.5 ΚΟΡΥΦΑΙΟ ΣΗΜΕΙΟ ΟΡΟΔΡΟΜΙΑΣ (VERTEX)

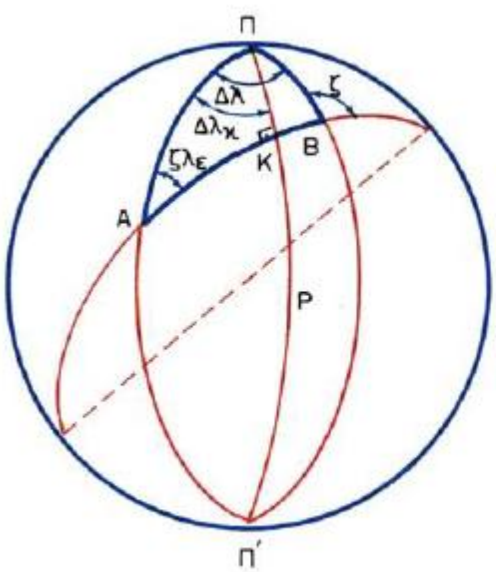
Έστω το τρίγωνο ορθοδρομίας ΠΑΒ (σχ. 6.5). Αν θεωρήσομε το μέγιστο κύκλο ΠΚΠ', που διέρχεται από τον πόλο Π και είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο ΑΒ, το σημείο τομής Κ ονομάζεται κορυφαίο (VERTEX) του ορθοδρομικού τόξου. Το σημείο Κ απέχει φυσικά τη μικρότερη απόσταση ΠΚ από τον πόλο Π, άρα τη μεγαλύτερη απόσταση ΚΡ από τον ισημερινό. Επομένως, από όλα τα σημεία του ορθοδρομικόυ τόξου, το Κ έχει το μεγαλύτερο γεωγραφικό πλάτος. (Ανάλογα βέβαια με το άνοιγμα των γωνιών Α και Β μπορεί το Κ να βρίσκεται και στην προέκταση του ΑΒ).

Ο υπολογισμός των συντεταγμένων του κορυφαίου σημείου Κ της ορθοδρομίας είναι πολύ χρήσιμος για τον υπολογισμό των συντεταγμένων των ενδιάμεσων σημείων, ώστε να χαράξομε το ορθοδρομικό τόξο.

4.6 ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ (Φκ – Λκ) ΤΟΥ ΚΟΡΥΦΑΙΟΥ ΣΗΜΕΙΟΥ

Επειδή ο μεσημβρινός ΠΚΠ' είναι κάθετος στο ορθοδρομικό τόξο, το σφαιρικό τρίγωνο ΠΚΑ (σχ. 6.5) είναι ορθογώνιο. Του τριγώνου αυτού γνωρίζομε την πλευρά ΠΑ = 90°- φε και τη γωνία Α = ζ (αρχική πλεύση). Αν το επιλύσομε, υπολογίζομε την πλευρά ΠΚ και τη γωνία ΑΠΚ, που ισούται με τη διαφορά μήκους Δλκ μεταξύ του σημείου εκκινήσεως Α και του κορυφαίου Κ.

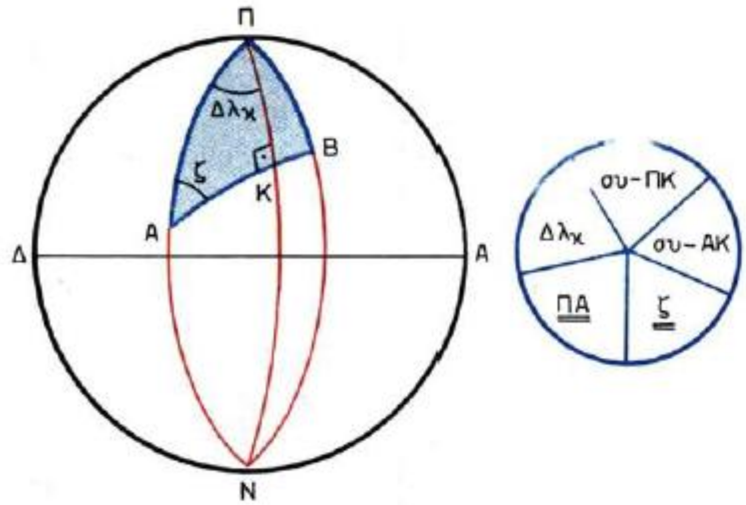
Επομένως, αν αφαιρέσομε από 90° την πλευρά ΠΚ, βρίσκομε το πλάτος φκ του κορυφαίου, ενώ αν προσθέσομε (ή αφαιρέσομε) στο μήκος λε του σημείου εκκινήσεως τη Δλκ, βρίσκομε το μήκος λκ του κορυφαίου.



Σχ. 6.5.

Παράδειγμα.

Ένα πλοίο πλέει από Α (πλάτος 41° 30' Β, μήκος 65° 40' Δ) στο Β (πλάτος 52° 18' Β, μήκος 4° 8' Δ) εκτελώντας ορθοδρομικό πλού. Αν η αρχική πλεύση είναι Β 53° 23' Α, να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του κορυφαίου σημείου της ορθοδρομίας (σχ. 6.6).



Σχ. 6.6.

Λύση.

1ος τρόπος.

Του ορθογωνίου τριγώνου ΑΠΚ γνωρίζομε τη γωνία Α = ζ= 53° 23' και την πλευρά ΠΑ = 90°-φε = 48° 30'.

Το επιλύομε κατά τα γνωστά. Εδώ βέβαια τα στοιχεία που μας ενδιαφέρουν είναι η γωνία Δλκ και η πλευρά ΠΚ.

1) Υπολογισμός Δλκ.

συνΠΑ = σφΔλκσφζ =>

σφΔλκ = συνΠΑσφζ (1)

2) Υπολογισμός ΑΚ.

συνζ = σφΠΑσφ(συ - ΑΚ)

=> συνζ = σφΠΑεφΑΚ

=> εφΑΚ = συνζεφΠΑ (2)

3) Υπολογισμός ΠΚ.

συν(συ - ΠΚ) = ημΠΑημζ

=> ημΠΚ = ημΠΑημζ (3)

4) Τύπος επαληθεύσεως.

συν(συ - ΠΚ) = σφΔλκ(συ - ΑΚ) => ημΠΚ = σφΔλκεφΑΚ

ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

	$\Delta\lambda_\kappa$	ΑΚ	ΠΚ
ζ =53°23'	λογεφζ =0,12894	λογσυνζ =9,77558	λογημζ =9,90452
ΠΑ =48°30'	λογσυνΠΑ =9,82126	λογεφΠΑ =0,05319	λογημΠΑ=9,87445
$\Delta\lambda_\kappa$ =48°16,7'	λογσφ$\Delta\lambda_\kappa$ =9,95020		
ΑΚ =33°59,2'	λογεφΑΚ =9,82877	λογεφΑΚ =9,82877	
ΠΚ =36°57'	λογημΠΚ =9,77897		λογημΠΚ =9,77897

Άρα πλάτος στο Κ = 90° - (36° 57) = 53° 3'Β

Επειδή το μήκος στο Α είναι 65° 40'Δ και το Κ είναι ανατολικά του Α, άρα το μήκος στο Κ = (65° 40') - (48° 16,7') = 17° 23,3'Δ.

2ος τρόπος.

Οι ναυτιλλόμενοι χρησιμοποιούν και εδώ μια πιο τυποποιημένη μέθοδο υπολογισμού των συντεταγμένων του κορυφαίου, εφαρμόζοντας απευθείας τους εξής τύπους:

1) Για την εύρεση του πλάτους:

συνφκ = συνφεημζ (1)

2) Για την εύρεση της Δλκ (διαφορά μήκους αρχικού στίγματος και κορυφαίου):

Έτσι αντικαθιστώντας έχομε:

Από τον τύπο (1):

λογσυνφκ =λογσυνφε + λογημζ

λογσυνφε = λογσυν41° 30' = 9,87446

λογημζ = λογημ 53° 23' = 9,90452

λογσυνφκ = 9,77898

==> φκ = 53° 3'

Από τον τύπο (2):

λογσφΔλκ =λογημφε + λογεφζ

λογημφ = λογημ 41 30' = 9,82126

λογεφζ = λογεφ 53° 23' = 0,12894

λογσφΔλκ = 9,95020

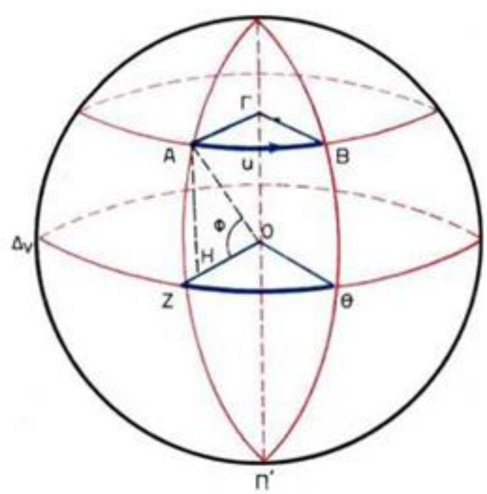
=ï> Δλκ = 48° 16,7'

Άρα βρήκαμε: Πλάτος στο K = 53° 3'B

Μήκος στο A = (65° 40') - (48° 16,7') = 17° 23,3'Δ

4.7 ΠΛΟΥΣ ΕΠΙ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΥ

Όταν το πλοίο εκτελεί πλού επάνω στον ίδιο παράλληλο, από τον τόπο Α στον τόπο Β (σχ. 6.7) οι δυο τόποι έχουν το ίδιο πλάτος φ του παραλλήλου και διαφορετικά μήκη λ1 και λ2 και η πορεία του πλοίου είναι σταθερή ή προς Ανατολή ή προς Δύση.



Σχ. 6.7.

Έστω υ η απόσταση από Α σε Β σε μίλια. Ενώνομε τα Α και Β με το κέντρο Γ του μικρού κύκλου (παράλληλου πλάτους) και τα Ζ, Θ, Α με το κέντρο Ο της γης·

Φέρομε από το Α την κάθετη ΑΗ στην ΟΖ. Η γωνία ΑΟΖ είναι φ, δηλαδή ίση με το πλάτος των Α και Β.

Επειδή <): ΖΟΘ = <): ΑΓΒ τα τόξα ΖΘ και ΑΒ είναι ανάλογα με τις ακτίνες τους. Άρα:

τόξο ΖΘ/ τόξο ΑΒ = ΟΖ / ΓΑ = ΟΑ / ΟΗ = τεμφ =>

τόξο ΖΘ = (τόξο ΑΒ) τεμφ δηλαδή Δλ = υτεμφ (1)

και υ = Δλσυνφ (2)

Δηλαδή το μήκος τόξου ενός παράλληλου ισούται με το γινόμενο του αντίστοιχου τόξου του Ισημερινού επί το συνημίτονο του πλάτους του παράλληλου.

0 τύπος (1) μπορεί να γραφεί και έτσι:

Διαφορά μήκους (πρώτα λεπτά) - Μήκος τόξου (σε μίλια) χ τέμνουσα πλάτους

Παράδειγμα.

Ένα πλοίο που βρίσκεται σε πλάτος 44° 33'Β, πλέει κατά 55 μίλια Ανατολικά (επάνω στον ίδιο παράλληλο). Να ευρεθεί η αλλαγή μήκους που προκύπτει.

Λύση.

Χρησιμοποιώντας τον προηγούμενο τύπο, έχομε:

Δλ = 55 . τεμ44° 33' = 55 . 1,4032 = 77,1 μίλια Ανατολ. = 77,1' Α δηλαδή 1° 17,1 Ά

4.8 ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΣ ΑΣΦΑΛΕΙΑΣ (Limiting parallel)

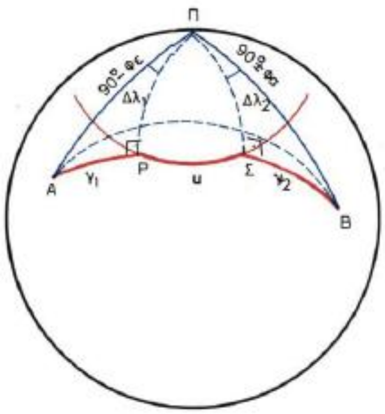
Ο πλούς (στις πολικές κυρίως περιοχές) πολλές φορές γίνεται επικίνδυνος, λόγω δυσμενών καιρικών συνθηκών και λόγω της πιθανότητας προσκρούσεως σε επιπλέοντα παγόβουνα ή σε ξηρά. Γι’ αυτό υπάρχουν ειδικοί χάρτες που αναφέρουν από ποιο σημείο και πέρα ο πλούς είναι επικίνδυνος. Ο παράλληλος πλάτους που διέρχεται από το σημείο αυτό λέγεται παράλληλος ασφαλείας

Αν λοιπόν πλέομε ορθοδρομικά και πρόκειται να διέλθομε από το κορυφαίο σημείο Κ, πρέπει να ελέγξομε, αν το σημείο αυτό, που το πλάτος του είναι το μεγαλύτερο της ορθοδρομίας, βρίσκεται πέρα από αυτόν τον παράλληλο ασφαλείας. Στην περίπτωση αυτή δεν ακολουθούμε ορθοδρομικό πλού, αλλά εκτελούμε τον λεγόμενο μικτό πλού.

4.9 ΜΙΚΤΟΣ ΠΛΟΥΣ

Πολλές φορές διάφορες τοπικές ή καιρικές συνθήκες δεν επιτρέπουν να υπερβούμε τον προκαθορισμένο παράλληλο ασφαλείας, ενώ συγχρόνως θέλομε να πλεύσομε από τη συντομότερη οδό. Ακολουθούμε τότε τον λεγόμενο μικτό πλού.

Έτσι, αν θέλομε να πλεύσομε από τον τόπο Α στον τόπο Β και ΡΣ είναι ο παράλληλος ασφαλείας (σχ. 6.9α) φέρομε από τα Α και Β τόξα μεγίστων κύκλων εφαπτόμενα στον παράλληλο ασφαλείας στα σημεία Ρ και Σ (σημεία επαφής). Έτσι ο μικτός πλούς αποτελείται από τρεις κλάδους: Από τα δυο ορθοδρομικά τόξα ΑΡ = γ, και ΒΔ = γ2 και από το μεταξύ τους τμήμα ΡΣ = υ του παράλληλου ασφαλείας. Δηλαδή πλέομε από το Α στο Ρ ορθοδρομικά, από το Ρ στο Σ λοξοδρομικά και από το Σ στο Β ορθοδρομικά.



Σχ. 6.9α.

Υπολογισμός των στοιχείων του μικτού πλού.

Αν μας δίνονται το μήκος φε και το πλάτος λε του σημείου εκκινήσεως Α, το μήκος φα και το πλάτος λα του σημείου αφίξεως καθώς και το πλάτος φσ του παράλληλου ασφαλείας, τότε υπολογίζομε:

1ο. Την ορθοδρομική απόσταση γ1. Επιλύομε το σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΡ που είναι ορθογ. στο Ρ και του οποίου γνωρίζομε τις πλευρές ΠΑ = 90° - φε και ΠΡ = 90° - φσ.

2ο. Την ορθοδρομική απόσταση γ2· Επιλύομε τώρα το ορθογώνιο στο Σ σφαιρικό τρίγωνο ΠΒΣ, του οποίου γνωρίζομε τις πλευρές ΠΒ = 90°±φα (+ για ετερώνυμα, - για ομώνυμα πλάτη φε, φα) και ΠΣ = 90° - φσ.

3ο. Τις συντεταγμένες των σημείων επαφής Ρ και Σ. Κατ’ αρχήν το πλάτος των Ρ και Σ είναι φσ ίσο με το πλάτος του παράλληλου ασφαλείας. Για το μήκος υπολογίζομε πρώτα τα Δλτ και Δλ2, που είναι οι διαφορές μήκους μεταξύ των σημείων εκκινήσεως και αφίξεως και των σημείων επαφής αντίστοιχα.

4ο. Τη λοξοδρομική απόσταση υ σε μίλια. Έχομε υ = Δλ'συνφσ, όπου Δλ' είναι η διαφορά μήκους μεταξύ των σημείων Ρ και Σ.

5ο. Την αρχική πλεύση ζ. Και αυτή προκύπτει, όπως είναι φανερό, από την επίλυση του ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου ΠΑΡ με τα ίδια γνωστά στοιχεία.

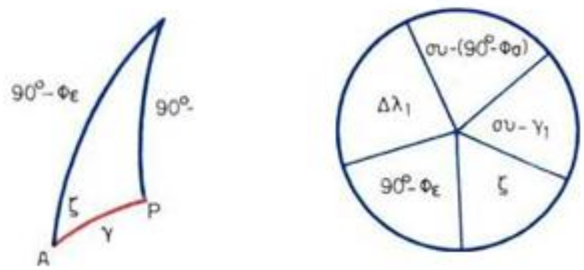
Παράδειγμα.

Δίνονται οι γεωγραφικές συντεταγμένες φε = 33° 10'N και λε = 71° 45'Δ του σημείου αναχωρήσεως Α και φα = 41° 58'N, λ<, = 174° 57Ά του σημείου αφίξεως Β. Δίνεται και το πλάτος φσ = 50° N του παράλληλου ασφαλείας. Ζητείται η επίλυση του μικτού πλού.

Λύση.

Αφού από τα σημεία Α και Β φέρομε τα εφαπτόμενα στον παράλληλο

ασφαλείας τόξα ΑΡ και ΒΣ (σχ. 6.9α) εργαζόμαστε ως εξής:



Σχ. 6.96.

1ος τρόπος.

α) Επιλύομε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΠΑΡ (σχ. 6.96).

1) Υπολογισμός ζ.

συν[συ - (90 - φα)] = ημ(90-φε)ημζ

=> ημ(90 - φσ) =συνφεημζ

=> συνφσ = συνφεημζ

=*> ημζ = συνφστεμφε

2) Υπολογισμός γ1

συν(90 - φε) = ημΙσυ-(-90-φς)]ημ(συ-γ1)

=> ημφε = συν(90 - φσ)συνγ1

=> ημΦε = ημφσσυνγ1

=*> συνγ1 = ημφεστεμφς

3) Υπολογισμός Δλ,.

συνΔλ1 = σφ(90 - φε)σφ[συ - (90 - φσ)]

=ï> συνΔλ1 = εφφεεφ(90 - φσ)

=> συνΔλ1 = εφφεσφφσ (3)

4) Τύπος επαληθεύσεως.

συνΔλ1 = ημζημ(συ-γ1)

=> συνΔλ1 = ημζσυνγ1

5. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΑΣΤΡΟΝΟΜΙΑ

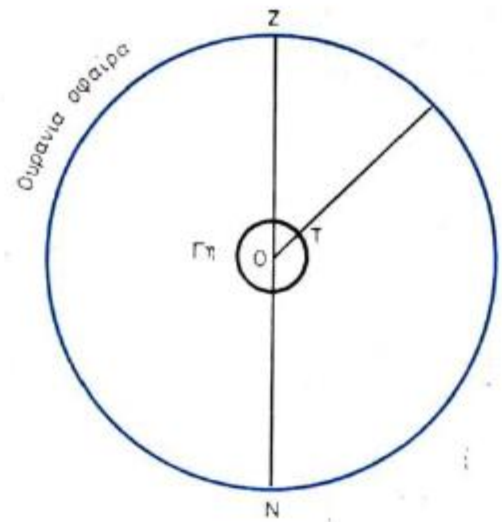
5.1 ΓΗ ΚΑΙ ΟΥΡΑΝΙΑ ΣΦΑΙΡΑ

Ουράνια σφαίρα ονομάζομε τη σφαίρα επάνω στην οποία φαίνονται καθηλωμένα τα άστρα και η οποία περιβάλλει τη γη. Κέντρο αυτής της σφαίρας είναι το κέντρο O της γης. Επειδή όμως η ακτίνα της ουράνιας σφαίρας μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει άπειρο μήκος, γι' αυτό η ακτίνα της γήινης σφαίρας θεωρείται αμελητέα και το τυχόν σημείο T της επιφάνειας της γης, όπου μπορεί να βρίσκεται ένας παρατηρητής, μπορεί να ληφθεί ως κέντρο της ουράνιας σφαίρας. Ο παρατηρητής αυτός βλέπει όλα τα ουράνια σώματα να κινούνται από την Ανατολή προς τη Δύση.

Η ουράνια σφαίρα ονομάζεται επίσης ***ουράνιος βόλος*** ή ***ουρανός.*** Το μπλε χρώμα του ουρανού οφείλεται κυρίως στη διάχυση της μπλε ακτινοβολίας του ηλιακού φωτός από τα μόρια της γήινης ατμόσφαιρας.

5.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΗΣ ΟΥΡΑΝΙΑΣ ΣΦΑΙΡΑΣ

Κατακόρυφος τόπου (ή γραμμή κατακορύφου) ενός τόπου λέγεται η διεύθυν¬ση της βαρύτητας στον τόπο αυτόν. Ως κατακόρυφος του τόπου T ορίζεται και η διεύθυνση της γήινης ακτίνας που διέρχεται από αυτόν (σχ. 7.2α).



Σχ. 7.2α.

Αν προεκτείνομε νοερά την κατακόρυφο ενός τόπου προς τα επάνω, αυτή συναντά την ουράνια σφαίρα στο σημείο Z, που ονομάζεται *Ζενίθ* του τόπου. Εάν την προεκτείνομε προς τα κάτω, συναντά την ουράνια σφαίρα στο σημείο N, εκ διαμέτρου αντίθετο του Z, που ονομάζεται *Ναδίρ* του τόπου.

Κατακόρυφα επίπεδα ονομάζονται τα άπειρα επίπεδα που διέρχονται από την κατακόρυφο ενός τόπου. Κάθε ένα από τα επίπεδα αυτά τέμνει την ουράνια σφαίρα κατά ένα μέγιστο κύκλο, που ονομάζεται *κατακόρυφος κύκλος* ή *κάθετος κύκλος* (VERTICAL CIRCLE).

Πρώτος κάθετος (PRIME VERTICAL) ονομάζεται ο κάθετος, του οποίου το επίπεδο είναι κάθετο προς το επίπεδο του μεσημβρινού του τόπου.

Ορίζοντες: Κάθε επίπεδο κάθετο προς την κατακόρυφο ονομάζεται *ορίζοντας. Ο* ορίζοντας που διέρχεται από το κοινό κέντρο γης και ουράνιας σφαίρας ονομάζεται *Αληθής* ή *Ουράνιος* ή *Μαθηματικός* ορίζοντας (CELESTIL HORIZON).

Ορατός ή *θαλάσσιος ορίζοντας* (VISIBLE HORIZON) είναι ο ορίζοντας, που βλέπει γύρω του ο ναυτιλλόμενος (εκεί δηλαδή που η ουράνια σφαίρα φαίνεται να συναντά την θάλασσα).

Φαινόμενος ορίζοντας (APPARENT HORIZON) είναι αυτός που το επίπεδό του διέρχεται από τον οφθαλμό του παρατηρητή.

Αισθητός ορίζοντας (SENSIBLE HORIZON) είναι αυτός που το επίπεδο του εφάπτεται στη γήινη επιφάνεια στο στίγμα του παρατηρητή.

Βάθος ορατού ορίζοντα (DIP OF HORIZON) ονομάζεται η γωνία που έχει κορυφή τον οφθαλμό του παρατηρητή και σχηματίζεται από τη διεύθυνση του ορατού ορίζοντα και τη διεύθυνση του φαινομένου.

Αξονας του κόσμου (CELESTIAL AXIS) ονομάζεται ο άξονας της γης, όταν θεωρηθεί ότι προεκτείνεται έως ότου συναντήσει την ουράνια σφαίρα.

Πόλοι του άξονα του κόσμου ή *ουράνιοι πόλοι* (CELESTIAL POLES) είναι τα σημεία στα οποία ο άξονας του κόσμου συναντά την ουράνια σφαίρα.

Βόρειο πόλο Π της ουράνιας σφαίρας ονομάζομε τον αντίστοιχο του γήινου βόρειου πόλου (ή τον ευρισκόμενο κοντά στον πολικό αστέρα).

Νότιο πόλο Π' της ουράνιας σφαίρας ονομάζομε τον αντίστοιχο του γήινου νότιου πόλου.

Ουράνιος Ισημερινός (CELESTIAL EQUATOR) ονομάζεται ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που προκύπτει από την τομή της με το επίπεδο του ισημερινού της γης.

Ουράνιοι μεσημβρινοί (CELESTIAL MERIDIANS) λέγονται οι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας που διέρχονται από τους ουράνιους πόλους. Αυτοί αποτελούν προεκτάσεις των γήινων μεσημβρινών.

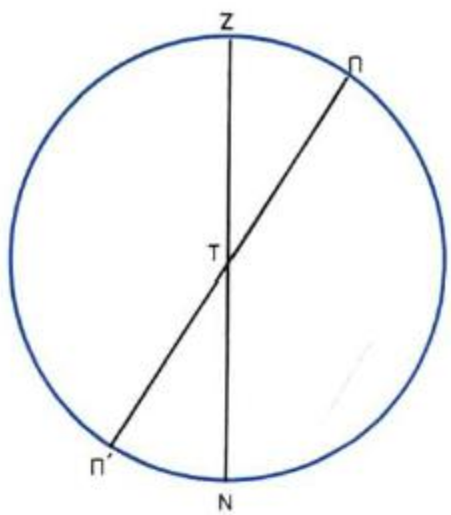
Ωρικοί ή *ωριαίοι κύκλοι* καλούνται οι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας, που έχουν για διάμετρό τους τον άξονα του κόσμου.

Παρατήρηση.

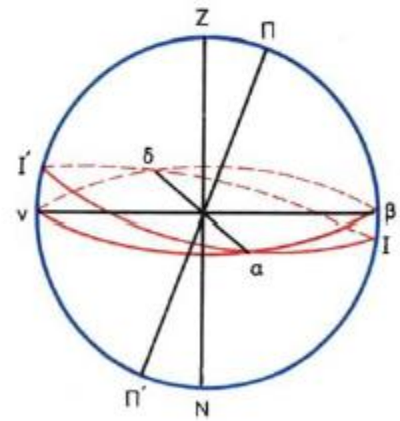
Οι ουράνιοι μεσημβρινοί, όπως και οι ωρικοί κύκλοι, είναι μέγιστοι κύκλοι της ουράνιας σφαίρας διερχόμενοι από τους πόλους. Η διαφορά τους είναι ότι οι μεν ουράνιοι μεσημβρινοί αποτελούν προεκτάσεις των γήινων μεσημβρινών, διατηρούν σταθερή τη θέση τους ως προς τη γη και παρακολουθούν την περιστροφή της, ενώ οι ωρικοί κύκλοι παρακολουθούν την ουράνια σφαίρα, στην οποία βέβαια ανήκουν, κατά τη φαινόμενη περιστροφή της.

Μεσημβρινός του τόπου Τ **(OBSERVER'S MERIDIAN) ή** ουράνιος μεσημβρινόςκαλείται ο μέγιστος κύκλος της ουράνιας σφαίρας που ορίζεται από την τομή αυτής με το επίπεδο που ορίζεται από τον άξονα του κόσμου ΠΠ' και της κατακόρυφου ΖΝ του τόπου Τ (σχ. 7.26.).

Μεσημβρινή γραμμή ονομάζεται η γραμμή βν (σχ. 7.2γ), που ορίζεται από την τομή του επιπέδου του ορίζοντα και του μεσημβρινού του τόπου και μας δείχνει την κατεύθυνση Βορρά-Νότου του τόπου.



Σχ. 7.2β.

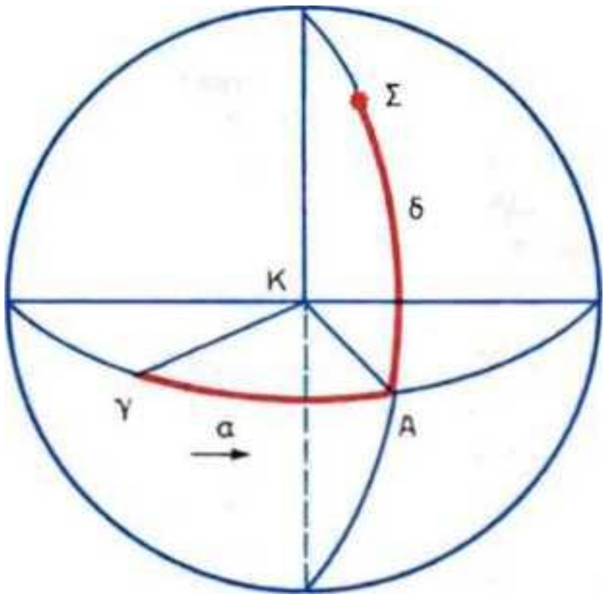


Σχ. 7.2γ.

Παρατήρηση.

Η κάθετη αδ προς τη μεσημβρινή γραμμή βν είναι κοινή διάμετρος του ισημερινού και του ορίζοντα και ονομάζεται γραμμή του πρώτου καθέτου ή άξονας του μεσημβρινού (σχ. 7.2γ). Τα άκρα της αποτελούν τον Απηλιώτη (δεξιά του Βορρά) και τον Ζέφυρο (αριστερά του Βορρά).

Κλίση (DECLINATION) ενός σημείου ή ενός αστέρα Σ είναι η γωνιώδης απόστασή του από τον ουράνιο ισημερινό δηλαδή το τόξο ΑΣ (σε μοίρες από 0° έως 90°) του ωρικού του κύκλου που περιλαμβάνεται μεταξύ ισημερινού και του αστεριού Σ (σχ. 7.2δ). Η δ χαρακτηρίζεται ως βόρεια ή νότια ανάλογα με τη θέση του αστέρα προς Β ή προς Ν του ουράνιου ισημερινού.



Ορθή αναφορά (RIGHT ASCENSION) ενός σημείου ή ενός αστέρα Σ της ουράνιας σιραίρας είναι η δίεδρη γωνία, που σχηματίζει ο ωρικός κύκλος του με τον ωριαίο του σημείου γ {εαρινό σημείο)- δηλαδή το τόξο γΑ του ουράνιου ισημερινού που περιλαμβάνεται μεταξύ του γ και του σημείου Α (σχ. 7.2δ), όπου ο ωρικός κύκλος του αστεριού Σ τέμνει τον Ισημερινό.

Η ορθή αναφορά μετρείται από 0° έως 360° επι του Ισημερινού με αφετηρία το εαρινό σημείο γ (Αποε) και κατά την ορθή φορά (δηλαδή εκ δυσμών προς ανατολάς).

Ωρική ή Ωριαία γωνία ΗΑ (HOUR ANGLE) είναι η δίεδρη γωνία που σχηματίζει ο ωρικός (ή ωριαίος) κύκλος του αστέρα με τον μεσημβρινό του τόπου, όπου βρισκόμαστε. Μετρείται πάντοτε επί τόξου του Ισημερινού κατά την ανάδρομη, συνήθως, φορά με αρχή ένα ορισμένο μεσημβρινό της γης από 0°-360°.

Ισημερινές ή Ουρανογραφικές συντεταγμένες (CELESTIAL EQUATOR SYSTEM OF COORDINATES) ονομάζονται η κλίση (ή απόκλιση) δ και η ορθή αναφορά α ενός σημείου επάνω στην ουράνια σφαίρα.

Παρατήρηση 1.

Οι Ισημερινές ή Ουρανογραφικές συντεταγμένες παρουσιάζουν μια σχεδόν πλήρη αντιστοιχία με τις γεωγραφικές συντεταγμένες. Πράγματι η μεν κλίση είναι εντελώς αντίστοιχη προς το γεωγραφικό πλάτος, η δε ορθή αναφορά είναι ανάλογη προς το γεωγραφικό μήκος.

Παρατήρηση 2.

Με τις συντεταγμένες αυτές μπορεί να καθορισθεί εντελώς η θέση ενός αστέρα Σ στην ουράνια σφαίρα, γιατί αυτές είναι ανεξάρτητες και από τον τόπο παρατηρήσεως και από τον χρόνο.

Ύψος ή αληθές ύψος Ηλ (ALTITUDE) ενός σημείου ή ενός αστέρα ονομάζεται η γωνιώδης απόστασή του από τον αληθή ορίζοντα του τόπου στον οποίο βρισκόμαστε, δηλαδή το τόξο του κάθετου κύκλου του αστέρα, που περιλαμβάνεται μεταξύ αυτού και του αληθούς ορίζοντα. Το ΗΑ μετρείται από 0° έως 90° με αρχή μετρήσεως τον ορίζοντα.

Αληθές αζψούθ Αζλ (AZIMUTH) είναι το τόξο του ορίζοντα που περιλαμβάνεται μεταξύ του μεσημβρινού του παρατηρητή και του κάθετου κύκλου του αστέρα. Το Αζ* μετρείται:

α') Από 0°-360° με αρχή μετρήσεως τον Βορρά κατά την ανάδρομη φορά, β') Από 0°-180° εκ του Β ή Ν (ανάλογα με τον άνω πόλο του παρατηρητή) προς Α ή Ζ.

γ') Από 0°-90° από Β ή Ν προς Α ή Ζ.

Οριζόντιες ή τοπικές συντεταγμένες (horizon system of cordinates) είναι το αληθές ύψος και το αληθές αζιμούθ.

5.3 Τρίγωνο θέσεως ή Αστρονομικό τρίγωνο.

Αν θεωρήσομε επάνω στην ουράνια σφαίρα (σχ. 7.3α) το σφαιρικό τρίγωνο που σχηματίζεται με κορυφές: α) Το ζενίθ του παρατηρητή, β) Τον άνω πόλο του παρατηρητή και γ) τη θέση ενός αστέρα στην ουράνια σφαίρα, τότε το σφαιρικό αυτό τρίγωνο λέγεται τρίγωνο θέσεως (ή αστρονομικό τρίγωνο).

Το αντίστοιχό του επάνω στην επιφάνεια της γης είναι το τρίγωνο που έχει κορυφές τις τομές με τη γήινη σφαίρα των τριών ακτίνων που συνδέουν το κέντρο της γης με τις κορυφές του τριγώνου θέσεως.

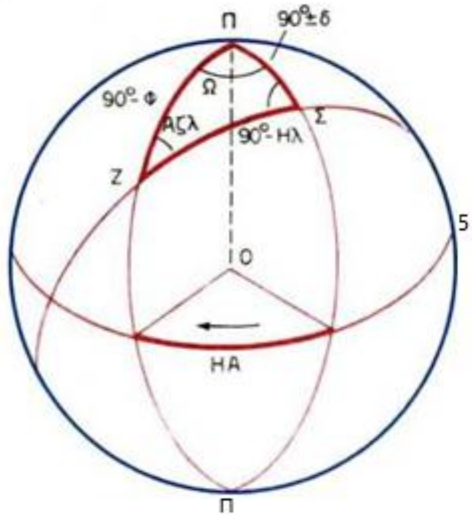
Τα κύρια στοιχεία του τριγώνου θέσεως είναι:

ΠΛΕΥΡΕΣ

α) Η ΠΖ που καλείται πολοζενιθιακή απόσταση και μετράει την απόσταση του τόπου, επάνω στον μεσημβρινό, από τον άνω πόλο. Ισούται με το σύμπλατος 90-φ.

β) Η ΠΣ καλείται πολική απόσταση Ρ και μετράει την απόσταση του αστέρα επάνω στον ωρικό κύκλο, από τον άνω πόλο. Είναι $P = 90° \pm \delta$ [το + για ετερώνυμα φ και δ και το - (πλην) για ομώνυμα φ και δ],

γ) Η ΖΣ που καλείται ζενιθιακή απόσταση Ζχ και μετράει την απόσταση του αστέρα από το ζενίθ, επάνω στον κάθε κύκλο του. Είναι Ζλ = 90 -Ηλ.



Σχ. 7.3α.

ΓΩΝΙΕΣ.

α) Η γωνία Ζ που καλείται αζιμούθ Αζχ του αστέρα,

β) Η γωνία Σ με κορυφή τον αστέρα, που ονομάζεται παραλλακτική γωνία ή γωνία θέσεως (δεν ενδιαφέρει το ναυτιλλόμενο).

γ) Η γωνία Ω με κορυφή τον πόλο Π και πλευρές το μεσημβρινό του τόπου και τον ωρικό κύκλο του αστέρα), που ονομάζεται ωρική γωνία ΗΑ (ίιουΓ εηρίθ) του αστέρα.

Παρατήρηση.

Η ωρική γωνία μετρείται με αρχή ορισμένο μεσημβρινό της προς τον ωρικό κύκλο του αστέρα από 0°-360° προς ανατολάς (ανατολική ωρική γωνία) ή προς δυσμάς (δυτική ωρική γωνία).

Σήμερα χρησιμοποιείται σε όλα τα προβλήματα της ναυτιλίας η δυτική ωρική γωνία. Αν ενός ουράνιου σώματος θεωρήσομε τη δυτική ωρική του γωνία, αυτή λαμβάνεται με αρχή το μεσημβρινό του τόπου και καλείται τοπική δυτική ωρική γωνία ί-ΗΑ (Local hour angle). Αν ως αρχή μετρήσεως λαμβάνεται ο μεσημβρινός του Greenwich, τότε καλείται δυτική ωρική γωνία Greenwich GHA (Greenwich Hour Angle). Προφανώς ισχύει LHA ~ GHA = λ, όπου λ το μήκος του τόπου.

Η δυτική ωρική γωνία του κέντρου του ηλίου, όταν εκφράζεται σε ώρες (h), πρώτα λεπτά (min) και δευτερόλεπτα (sec), αντιστοιχεί στον αληθή χρόνο Α.Τ. (Apparent time). Αν ο αληθής χρόνος αναφέρεται στο μεσημβρινό του τόπου, ονομάζεται αληθής τοπικός χρόνος LAT (Local Apparent Time). Αν αναφέρεται στο μεσημβρινό του Greenwich, ονομάζεται αληθής χρόνος Greenwich GAT (Greenwich Apparent Time).

Επειδή η αληθής ημέρα αρχίζει κατά την κάτω μεσημβρινή διάβαση του ηλίου, δηλαδή το μεσονύκτιο όπου υπάρχει ελάχιστη ανθρώπινη δραστηριότητα, ο αληθής ηλιακός χρόνος θα διαφέρει από την αντίστοιχη δυτική ωρική γωνία του ηλίου κατά 12 ώρες ή 180°. Άρα για τυχόντα μεσημβρινό θα έχομε:

LAT = LHA ± 180°

όπου (+) όταν η LHA, δηλαδή η Ω, είναι μικρότερη από 180° ή 12 ώρες και (-) όταν είναι μεγαλύτερη.

Επίσης μπορούμε να πούμε ότι ο αληθής τοπικός χρόνος του παρατηρητή σε μια οποιαδήποτε στιγμή είναι ίση με 12Η - Ω (του τριγώνου θέσεως), όταν ο ήλιος βρίσκεται στο Ανατολικό ως προς εμάς ημισφαίριο ή 12Η - Ω (του τριγώνου θέσεως), όταν ο ήλιος βρίσκεται στο Δυτικό ως προς εμάς ημισφαίριο).

Αν η δυτική ωρική γωνία αναφέρεται στο εαρινό σημείο γ (ARIES), τότε μετράει αστρικό χρόνο (Sideral time). Αν αναφέρεται στον ήλιο μετράει ηλιακό χρόνο (Solar time).

Ο χρόνος κατά συνέπεια είναι τοπικός (Local time) ή Greenwich), αν αντίστοιχα ως αρχή μετρήσεως λαμβάνεται ο μεσημβρινός του τόπου ή του Greenwich.

Τα συνηθέστερα προβλήματα που εμφανίζονται στο τρίγωνο θέσεως είναι τα εξής:

α) Δίνεται το πλάτος, η κλίση και η ωρική γωνία και ζητούνται το ύψος και το αζιμούθ του αστέρα (ευθείες θέσεως). β) Δίνεται το πλάτος, το ύψος και το αζιμούθ και ζητείται η κλίση και η ωρική γωνία (αναγνώριση αστέρα).

γ) Δίνεται η ωρική γωνία, η κλίση και το ύψος και ζητείται το αζιμούθ (παραλλαγή).

δ) Δίνεται το ύψος, η κλίση και η ωρική γωνία και ζητείται το πλάτος. 7.3.1

Παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.

Το πλάτος του Σαν Φραντζίσκο είναι 37° 48'N (βόρειο). Μια προμεσημβρινή

παρατήρηση δείχνει ύψος ηλίου 22° 30'. Αν η κλίση του ήλιου είναι 12° 40'N (βόρειο), ποιος είναι ο χρόνος παρατηρήσεως;

Λύση.

Στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ (σχ. 7.3β) έχομε:

ΠΣ = 90° - δ = 90°- (12° 40’) = 77° 20' [βάζομε - (πλην) γιατί

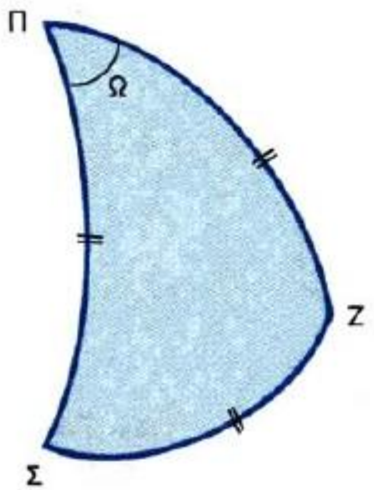
φ και δ ομώνυμα].

ΠΖ = 90° - φ = 90°- (37° 48) = 52° 12'

ΖΣ = 90° - Ηλ = 90°- (22° 30') = 67° 30'

Εδώ γνωρίζομε και τις τρεις πλευρές (περίπτωση Ι επιλύσεως τυχόντων τριγώνων) και μας ενδιαφέρει να υπολογίσομε μόνο τη γωνία Ω. Εργαζόμαστε ακριβώς όπως στην περίπτωση Ι, 1ος τρόπος, συντάσσοντας το εξής φύλλο υπολογισμού, με

$$\tau = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = 98^\circ\ 31'$$



Σχ. 7.36.

ΦΥΛΛΟ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ

	Ω
$\tau-\alpha = 31^\circ\ 1'$: $\lambda o\gamma\eta\mu(\tau-\alpha) = 9{,}71205$	$\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu(31^\circ\ 1') = 0{,}28795$
$\tau-\beta = 21^\circ\ 11'$: $\lambda o\gamma\eta\mu(\tau-\beta) = 9{,}55793$	
$\tau-\gamma = 46^\circ\ 19'$: $\lambda o\gamma\eta\mu(\tau-\gamma) = 9{,}85924$	
$\tau = 98^\circ\ 31'$: $\lambda o\gamma\sigma\tau\epsilon\mu\tau = 0{,}00482$	
$2\lambda o\gamma k = 29{,}13404$	
$\lambda o\gamma k = 9{,}56702$ →	→ $\lambda o\gamma k = 9{,}56702$
$\frac{\Omega}{2} = 35^\circ\ 36{,}36'$ ←	← $\lambda o\gamma\epsilon\varphi \frac{\Omega}{2} = 9{,}85497$
$\Omega = 71^\circ\ 12{,}7'$	

Άρα, αφού βρήκαμε Ω = 71° 12,7', διαιρούμε δια 15 (κάθε γωνία 15° παριστά χρόνο 1 ώρας) και έχομε: 4h 44^{min} 55sec

Άρα ο χρόνος παρατηρήσεως είναι: 12:00 — 4h 44^{min} 51^{sec} = 7h 15^{min} 9^{sec}

Παράδειγμα 2.

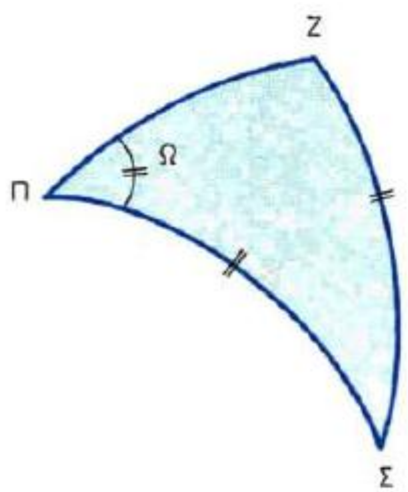
Να βρεθεί το πλάτος ενός παρατηρητή που βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο, αν κατά τη φαινόμενη τοπική ώρα I0h 25^{min} 36sec το ύψος του ηλίου είναι 40° 10' και η κλίση 15° 38 N (βόρεια).

Λύση.

Στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ (σχ. 7.3γ) έχομε:

ΖΣ = α = 90° - $H_λ$ = 90° - (40° 10) = 49° 50'

ΠΣ =β = 90° - δ = 90° - (15° 38) = 74° 22'
και γωνία **Ω** = 12h – 10h 25min 36sec = **1**h 34min 24^{sec0} = 23° 36'



Σχ. 7.3γ.

Άρα έχομε προς επίλυση ένα τρίγωνο της περιπτώσεως V, στο οποίο μας ενδιαφέρει μόνο η πλευρά γ = ΠΖ.

Η πλευρά γ = ΠΖ δίνεται από τον τύπο (βλ. 1ο τρόπο περιπτώσεως V):

$$εφ\frac{γ}{2} = ημ\frac{Ω+Z}{2}εφ\frac{β-α}{2}στεμ\frac{Ω-Z}{2} \quad (1)$$

όπου όλα δίνονται εκτός από τη γωνία Z, που υπολογίζεται από τον τύπο (νόμος ημιτόνων):

ημZ = ημβημΩστεμα (2)

Για να μη συντάξομε εδώ φύλλο υπολογισμού, γιατί δεν μας ενδιαφέρουν όλα τα στοιχεία του τριγώνου, υπολογίζομε από τον τύπο (2) την γωνία Z:

λογημβ = 9,98363

λογημΩ = 9,60244

<u>λογστεμα =0,11681</u>

λογημZ =9,70288 => Z = 30° 18’

Επειδή όμως ο παρατηρητής βρίσκεται στο Βόρειο ημισφαίριο θα πάρομε:

Z = 180° - 30° 18'

άρα Z = 149° 42'

Αντικαθιστούμε τώρα στον τύπο (1):

$$εφ\frac{Y}{2} = ημ(86° \ 39') \ εφ(12° \ 16') \ στεμ(63° \ 3')$$

Άρα :

λογημ86° 39' =9,99926

λογεφ12° 16' =9,33731

λογστεμ63° 3' =<u>0,04993</u>

λογεφ Y/2 =9,38650

Y/2 = 13° 41,1 -> γ = ΠZ = 27° 22,2’

Άρα πλάτος παρατηρητή:

φ = 90° - ΠZ = 62° 37,8' Βόρειο.

5.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΥ ΤΡΙΓΩΝΟΥ ΘΕΣΕΩΣ

Εφαρμογή 1η.

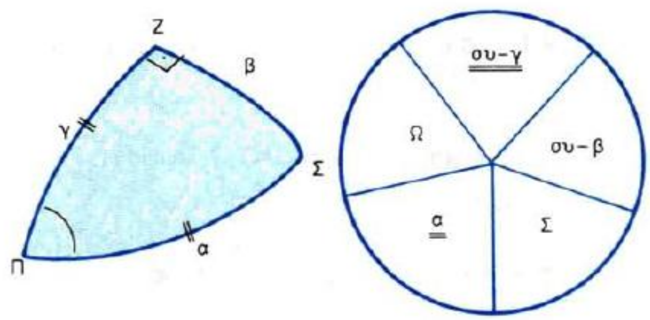
Να υπολογισθεί η ωρική γωνία Ω ενός αστέρα Σ, του οποίου η απόκλιση είναι δ = 47° 50' N (Βόρειο), σε ένα τόπο πλάτους φ = 50° 38'N (Βόρειο) τη στιγμή που ο αστέρας διέρχεται από τον πρώτο κάθετο.

Λύση.

Όταν ο αστέρας βρίσκεται στον πρώτο κάθετο, τότε το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσεως είναι ορθογώνιο στο Ζ και άρα Αζλ = 90° (σχ. 7.5α). Επομένως στο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ του αστέρα γνωρίζομε:

Τη γωνία Ζ = Αζλ = 90°, την πλευρά ΠΖ = γ = 90° - φ = 90° - (50° 38) = 39° 22' και την πλευρά ΠΣ = α = 90° - δ = 90° - (47° 50') = 42° 10'. Ζητείται η γωνία Π = Ω.

Για να υπολογίσομε την Ω εργαζόμαστε όπως έχομε μάθει στα ορθογώνια σφαιρικά τρίγωνα. Από τους πέντε τομείς έχομε, θεωρώντας το Ω ως μεσαίο στοιχείο και προκείμενα του τα α και συ-γ:



Σχ. 7.5α.

συνΩ = σφασφ(συ - γ) =>

συνΩ = σφαεφγ =>

=ï> λογσυνΩ = λογσφα + λογεφγ

=ï> λογσυνΩ = λογσφ(42° 10') + λογεφ(39° 22')

=ï> λογσυνΩ = 0,04302 + 9,91404

=ï> λογσυνΩ = 9,95706

=>Ω = 25° 3,7'

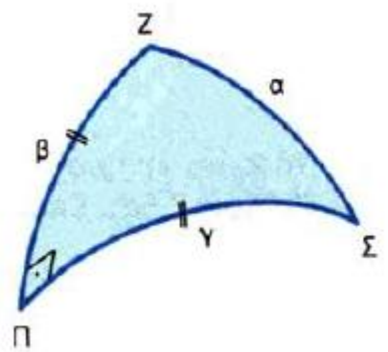
Εφαρμογή 2η.

Να υπολογισθεί το ύψος αστέρα με κλίση δ = 18° 48'Ν (Βόρειο), σε τόπο πλάτους φ = 36° 48'Ν (Βόρειο), όταν η ωρική γωνία του αστέρα είναι 6h.

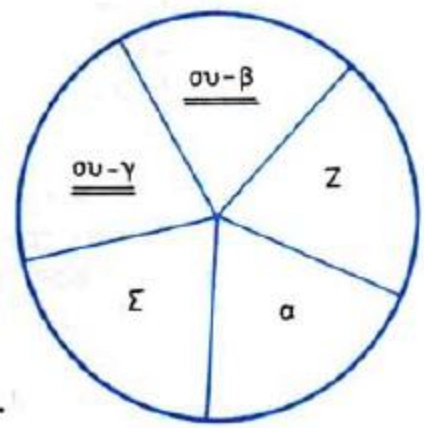
Λύση.

Επειδή η γωνία Ω είναι 6h = 90°, το σχηματιζόμενο τρίγωνο θέσεως ΠΖΣ θα είναι ορθογώνιο (σχ. 7.56).

Άρα εδώ θα έχουμε :



Σχ. 7.56.



Πλευρά ΠΖ = θ = 90° - φ = 90° - (36° 48) = 53° 12'

ΠΣ = γ = 90° - δ = 90° - (18° 48') = 71° 12'

Θα υπολογίσομε την πλευρά α = ΖΣ. Με α μεσαίο στοιχείο, τα συ-**β**, συ-γ είναι αντικείμενά του. Άρα:

συνα = ημ(συ-β) ημ{συ-γ)

λογσυνα = λογσυνθ + λογσυνγ

λογσυνα = λογσυν(53° 12') + λογσυν(71° 12')

λογσυνα = 9,77744 + 9,50821

λογσυνα = 9,28565

$\alpha = 78° \, 52{,}2'$

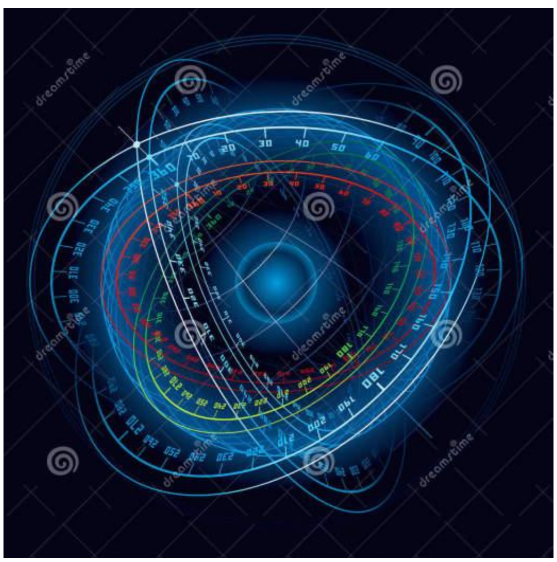
‘Αρα :

$H_{\lambda} = 90° - Z\Sigma = 90° - \alpha = 11° \, 7{,}8'$

6. ΕΠΙΛΟΓΟΣ

Φτάνοντας στο τέλος αυτής της εργασίας θα ήθελα να αναφέρω για άλλη μια φορά πόσο σημαντική είναι η σφαιρική τριγωνομετρία με τεράστια συμβολή στην ναυτιλία και στην αστρονομία. Η εξέλιξη της έχει συμβεί και έχει φτάσει σε αυτό που γνωρίζουμε μέσα από την πάροδο των αιώνων, έχοντας σαν αφετηρία την αρχαία Ελλάδα όπου μέσω της χρήσης ενός κανόνα και ενός διαβήτη γινόταν η προσπάθεια για επίλυση προβλημάτων έως τον 16 – 17ο αιώνα όπου με σημαντικές ανακαλύψεις πήρε την μορφή που γνωρίζουμε σήμερα.

Γενικά η γνώση σφαιρικής τριγωνομετρίας και ειδικά των εφαρμογών της είναι απαραίτητη για έναν ναυτίλο και δεν μειώνεται αυτή η αναγκαιότητα η υποβαθμίζεται από τη χρήση των σύγχρονων μηχανημάτων.



7. ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

www.telemath.gr

el.wikipedia.gr

en.wikipedia.com

http://mathworld.wolfram.com/

portal.survey.ntua.gr/main/courses/hisatgeodesy/geoastro/book/GeoAstro_chapter11.pdf

www.portal.survey.ntua.gr (Ε.Μ.Π.)

ΣΦΑΙΡΙΚΗ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ - Χρήστου Ι. Πεππα (Ίδρυμα Ευγενίδου)