ΗΛΕΚΤΡΟΤΕΧΝΙΑ
Α’ ΕΞΑΜΗΝΟΥ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΕΜΠΟΡΙΚΟΥ ΝΑΥΤΙΚΟΥ

ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ

ΣΧΟΛΗ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ

Ηλεκτρικό Ρεύμα

Ηλεκτρικό ρεύμα i ρέει σε έναν αγωγό, όταν ηλεκτρικό φορτίο q μεταφέρεται από ένα σημείο σε άλλο μέσα σε αυτόν τον αγωγό. Το ρεύμα είναι το μεταφερόμενο φορτίο ανά μονάδα χρόνου, δηλαδή

$$i(\text{ampere}) = \frac{dq\ (\text{coulomb})}{dt\ (\text{second})}$$

Διαφορά δυναμικού ή τάση υ

Η διαφορά δυναμικού ή τάση υ μεταξύ δυο σημείων μετριέται από το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί η μονάδα φορτίου από το ένα σημείο στο άλλο.

Το volt (V) είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ δυο σημείων, όταν απαιτείται έργο 1 joule για να μεταφερθεί φορτίο 1 coulomb από το ένα σημείο στο άλλο :

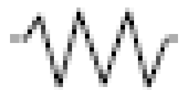
$$1\text{volt}=1\text{joule}/\text{coulomb}$$

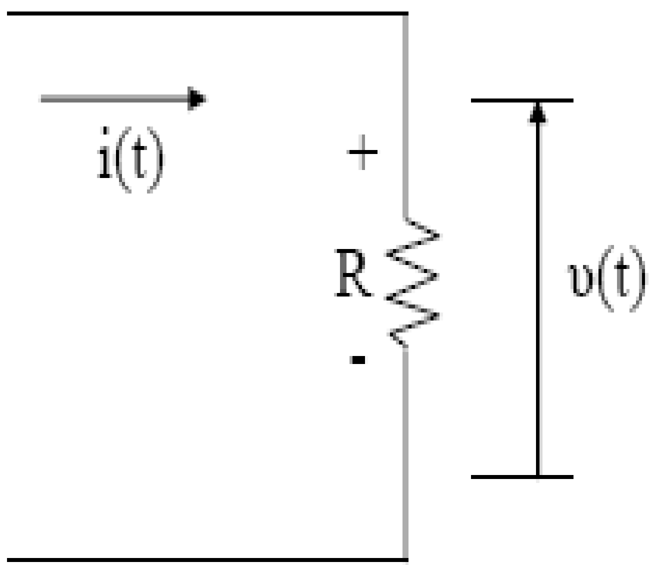
Ισχύς p

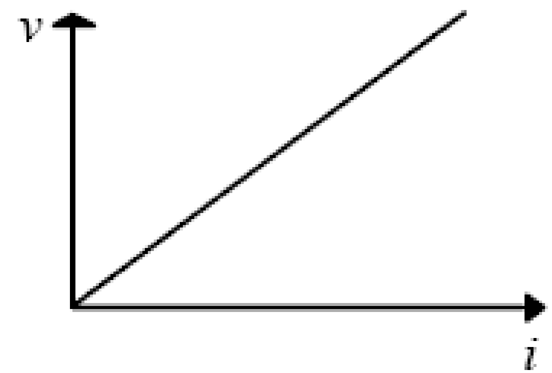
Η ηλεκτρική ισχύς p είναι το γινόμενο της εφαρμοζόμενης τάσης υ επί το ρεύμα i που οφείλεται σ’ αυτή.

$$p(\text{watt}) = \upsilon(\text{volt}) \times i(\text{ampere})$$

Αντίσταση R

- Σύμβολο R (Resistance)
- Σχέδιο 





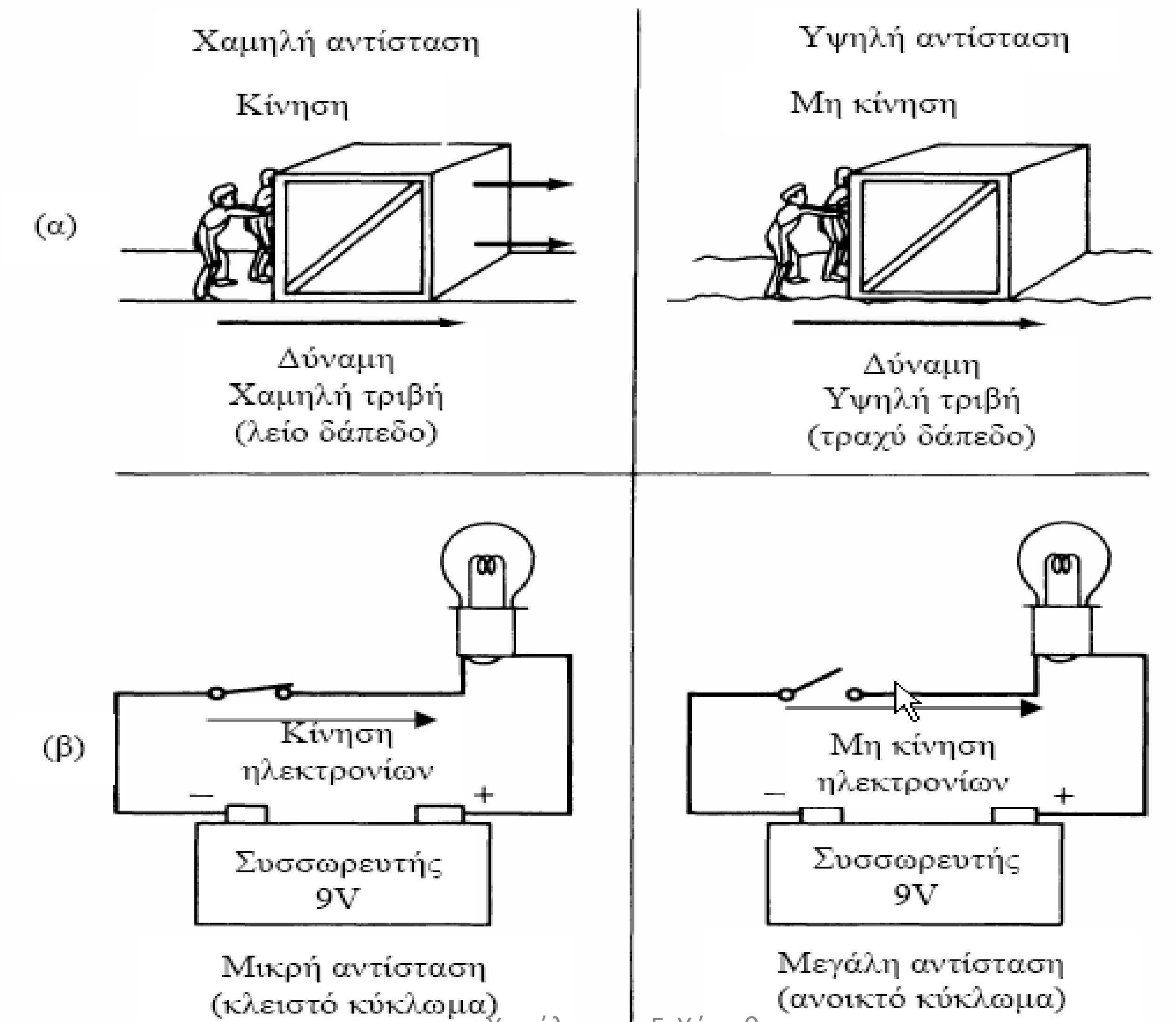
(β) χαρακτηριστική

Αντίσταση R

Η διαφορά δυναμικού υ(t) στις άκρες ενός καθαρού αντιστάτη είναι ανάλογη προς το ρεύμα i(t) που τον διαρρέει. Η σταθερή R της αναλογίας ονομάζεται αντίσταση του αντιστάτη και εκφράζεται σε volt/ampere ή ohm (Ω).

$$\upsilon(t) = Ri(t) \quad \text{και} \quad i(t) = \frac{\upsilon(t)}{R}$$

Αντίσταση R



Χαμηλή αντίσταση
Κίνηση
(α)
Δύναμη
Χαμηλή τριβή
(λείο δάπεδο)
Υψηλή αντίσταση
Μη κίνηση
Δύναμη
Υψηλή τριβή
(τραχύ δάπεδο)
(β)
Κίνηση
ηλεκτρονίων
−
+
Συσσωρευτής
9V
Μικρή αντίσταση
(κλειστό κύκλωμα)
Μη κίνηση
ηλεκτρονίων
−
+
Συσσωρευτής
9V
Μεγάλη αντίσταση
(ανοικτό κύκλωμα)

Ειδικές περιπτώσεις

Το βραχυκύκλωμα (short circuit)

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών ονομάζεται βραχυκύκλωμα, όταν η τάση κλάδου είναι μηδέν, ενώ το ρεύμα κλάδου έχει αυθαίρετη τιμή.

Με άλλα λόγια, το βραχυκύκλωμα χαρακτηρίζεται από μηδενική αντίσταση $R = 0$

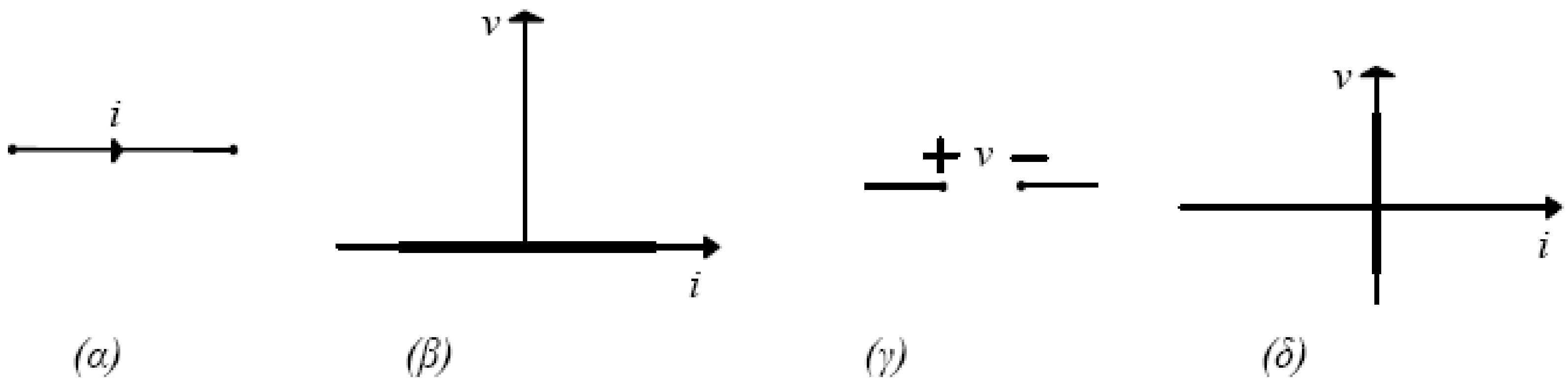
Ειδικές περιπτώσεις

Το ανοικτό κύκλωμα (open circuit).

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών ονομάζεται ανοικτό κύκλωμα, όταν το ρεύμα κλάδου είναι μηδέν, αλλά η τάση κλάδου έχει αυθαίρετη τιμή.

Με άλλα λόγια, το ανοικτό κύκλωμα χαρακτηρίζεται από άπειρη αντίσταση $R = \infty$

Ειδικές περιπτώσεις

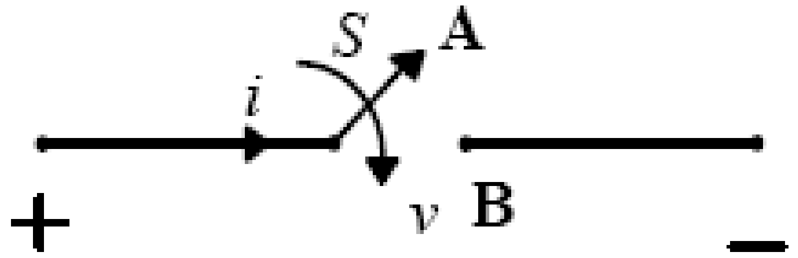


Βραχυκύκλωμα: (α) σύμβολο, (β) i-v χαρακτηριστική

Ανοικτό κύκλωμα: (γ) σύμβολο, (δ) i-v χαρακτηριστική

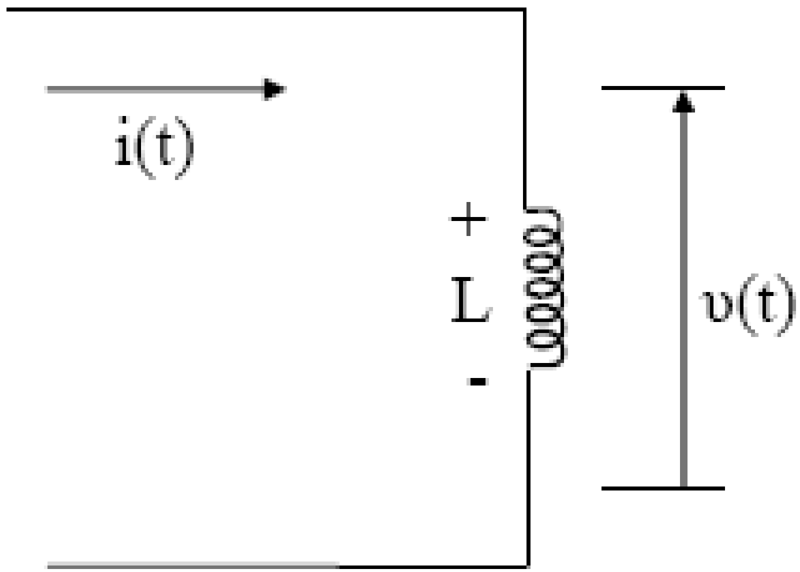
Ειδικές περιπτώσεις

Το στοιχείο δύο ακροδεκτών, που συνδυάζει τις ιδιότητες του βραχυκυκλώματος και του ανοικτού κυκλώματος, ονομάζεται διακόπτης (switch). Ο διακόπτης είναι ένα στοιχείο δύο καταστάσεων.



Αυτεπαγωγή L πηνίο

- Σύμβολο L (συντελεστής αυτεπαγωγής ή αυτεπαγωγή του κυκλώματος)
- Σχέδιο 



Αυτεπαγωγή L πηνίο

Όταν το ρεύμα σ’ ένα κύκλωμα μεταβάλλεται, η μαγνητική ροή που διαρρέει το κύκλωμα αυτό αλλάζει. Η μεταβολή αυτής της ροής έχει σαν αποτέλεσμα την επαγωγή στο κύκλωμα μιας ΗΕΔ u. Αν η μαγνητική διαπερατότητα είναι σταθερή, η επαγόμενη ΗΕΔ u είναι ανάλογη προς την ταχύτητα μεταβολής του ρεύματος.

$$\upsilon(t) = L\frac{di}{dt} \quad \text{και} \quad i(t) = \frac{1}{L}\int \upsilon dt$$

Αυτεπαγωγή L πηνίο

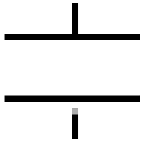
Όταν η u εκφράζεται σε volt και το di/dt σε ampere / second, τότε η L θα εκφράζεται σε

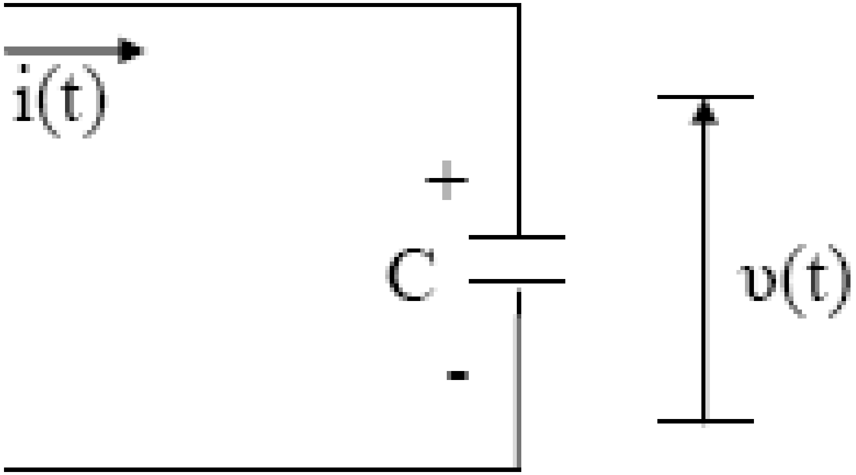
volt · second / ampere ή henry(H).

Η αυτεπαγωγή ενός κυκλώματος είναι 1 henry (1 H), αν στο κύκλωμα αυτό επάγεται ΗΕΔ 1 volt όταν το ρεύμα μεταβάλλεται κατά 1 ampere σε 1 second.

Χωρητικότητα C (πυκνωτής)

- Σύμβολο C (χωρητικότητα ενός πυκνωτή)
- Σχέδιο





Χωρητικότητα C (πυκνωτής)

Η διαφορά δυναμικού u μεταξύ των ακροδεκτών ενός πυκνωτή είναι ανάλογη προς το φορτίο q που φέρει ο πυκνωτής.

Όταν το q εκφράζεται σε coulomb και το u σε volt, το C εκφράζεται σε coulomb/volt ή farad (F)

$$q(t) = C\upsilon(t), \quad i = \frac{dq}{dt} = C\frac{d\upsilon}{dt}, \quad \upsilon(t) = \frac{1}{C}\int i\,dt$$

Χωρητικότητα C (πυκνωτής)

Ένας πυκνωτής έχει χωρητικότητα 1 farad (1 F), αν απαιτείται φορτίο 1coulomb ανά volt διαφοράς δυναμικού μεταξύ των οπλισμών του.

Χρήσιμα υποπολλαπλάσια του farad είναι :

1nF = 1nanofarad = 10^{-9}F και

1pF = 1picofarad = 10^{-12}F

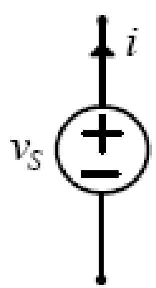
Πηγές τάσης και ρεύματος

Οι πηγές τάσης και ρεύματος είναι εκείνα τα ηλεκτρικά στοιχεία δύο ακροδεκτών που προκαλούν τις διεγέρσεις των ηλεκτρικών κυκλωμάτων.

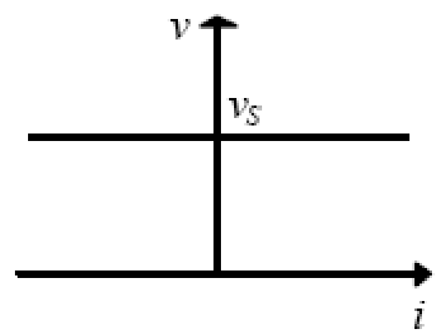
Τροφοδοτούν τα κυκλώματα μας με τάση ή ρεύμα.

Πηγές τάσης και ρεύματος

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών ονομάζεται ανεξάρτητη πηγή τάσης (independent voltage source), όταν η τάση του κλάδου είναι ανεξάρτητη από το ρεύμα του κλάδου.



(α) σύμβολο



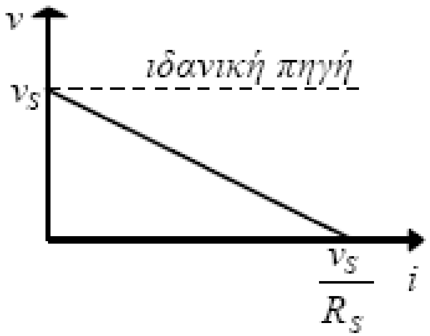
(β) χαρακτηριστική

Πηγές τάσης και ρεύματος

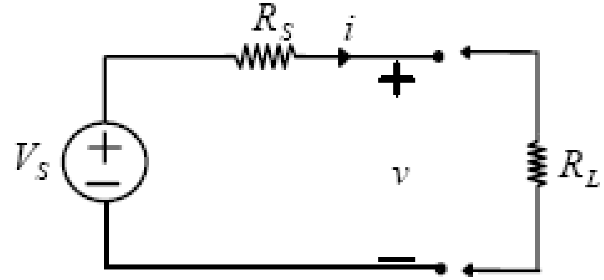
Αν η τάση της πηγής είναι χρονικά αμετάβλητη, τότε η πηγή καλείται πηγή συνεχούς τάσης (dc πηγή τάσης).

Η παραπάνω πηγή με την χαρακτηριστική που δίνεται στην προηγούμενη διαφάνεια ονομάζεται ιδανική πηγή τάσης καθώς δεν παρουσιάζει απώλειες.

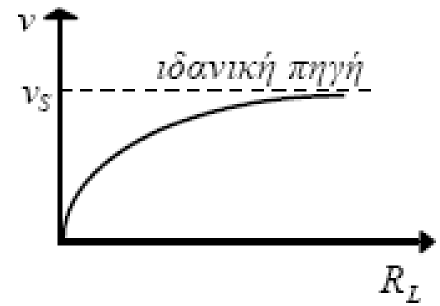
Πραγματική πηγή τάσης



(α) χαρακτηριστική



(β) μοντέλο



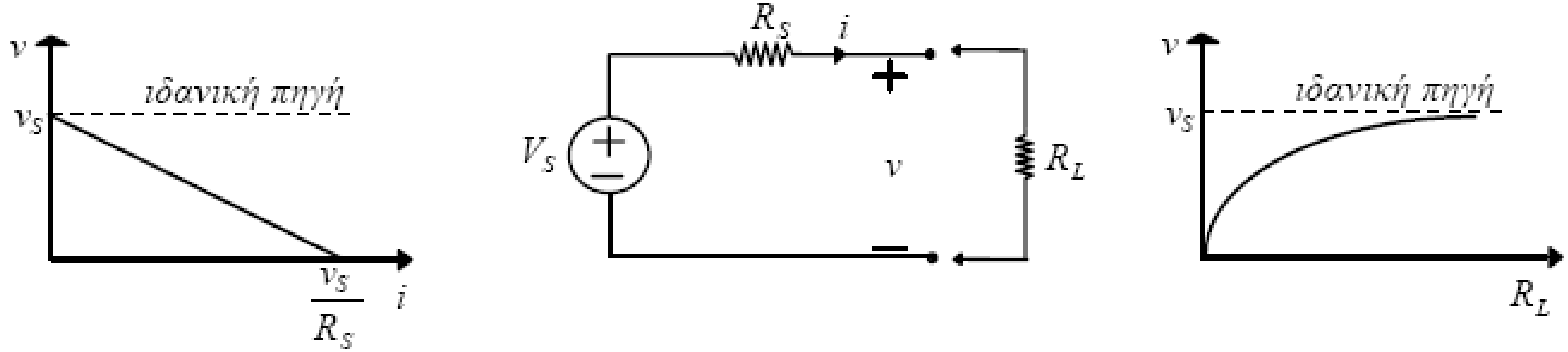
(γ) $v = f(R_L)$

Στην πράξη, η τάση μιας πηγής τάσης είναι συνάρτηση του ρεύματος που παρέχει η πηγή. Η κλίση της χαρακτηριστικής δηλώνει ότι η πραγματική πηγή τάσης είναι ο συνδυασμός σε σειρά μιας ιδανικής πηγής τάσης και μιας αντίστασης.

Η αντίσταση αυτή ονομάζεται **εσωτερική αντίσταση της πηγής**

Γενικά, οι πραγματικές πηγές τάσης χαρακτηρίζονται από πολύ μικρή εσωτερική αντίσταση, σε σχέση με την αντίσταση φορτίου.

Πραγματική πηγή τάσης



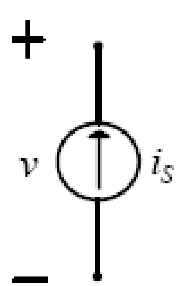
(α) χαρακτηριστική (β) μοντέλο (γ) $v = f(R_L)$

Ρεύμα βραχυκύκλωσης καλείται το ρεύμα που διαρρέει την πηγή όταν αυτή βραχυκυκλώνεται.

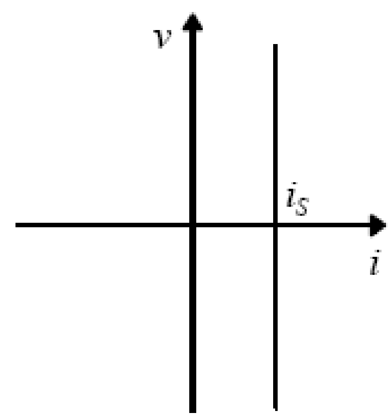
$$I_{βραχ} = \frac{E}{r}$$

Πηγές τάσης και ρεύματος

Ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών ονομάζεται ανεξάρτητη πηγή ρεύματος (independent current source), όταν το ρεύμα του κλάδου είναι ανεξάρτητο από την τάση του κλάδου.

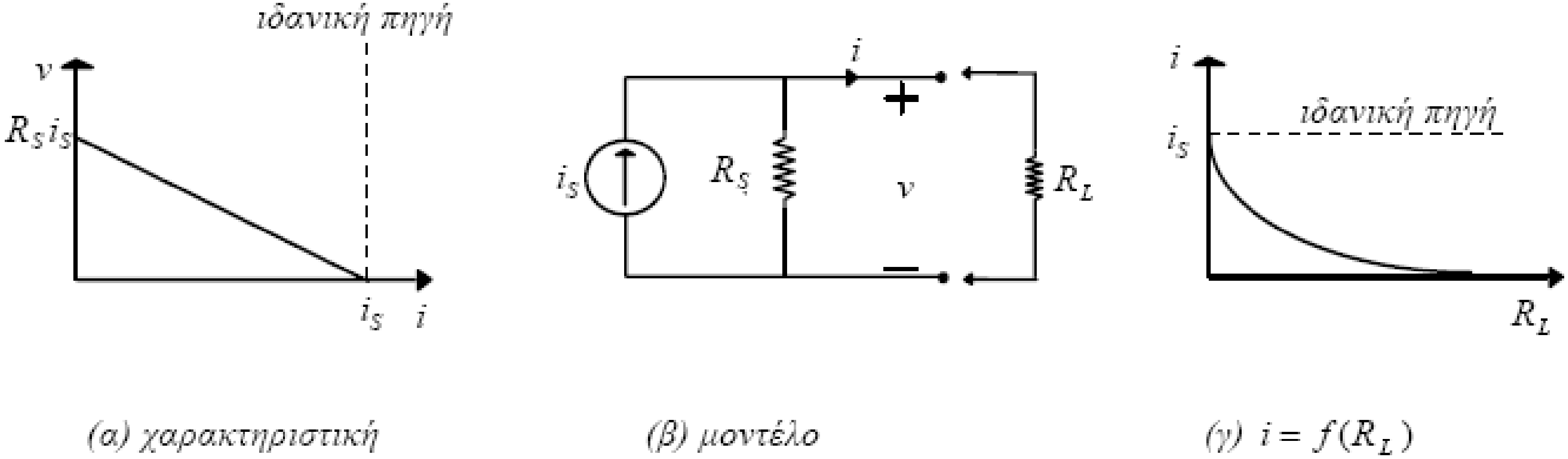


(α) σύμβολο



(β) χαρακτηριστική

Πραγματική πηγή ρεύματος



Στην πράξη, το ρεύμα μιας πηγής ρεύματος είναι συνάρτηση της τάσης που αναπτύσσεται στα άκρα της πηγής. Η κλίση της χαρακτηριστικής δηλώνει ότι η πραγματική πηγή ρεύματος είναι ο παράλληλος συνδυασμός μιας ιδανικής πηγής ρεύματος και μιας αντίστασης.

Η αντίσταση αυτή αποτελεί την εσωτερική αντίσταση της πηγής.

Γενικά, οι πραγματικές πηγές ρεύματος χαρακτηρίζονται από πολύ μεγάλη εσωτερική αντίσταση, σε σχέση με την αντίσταση φορτίου.

Πηγές τάσης και ρεύματος

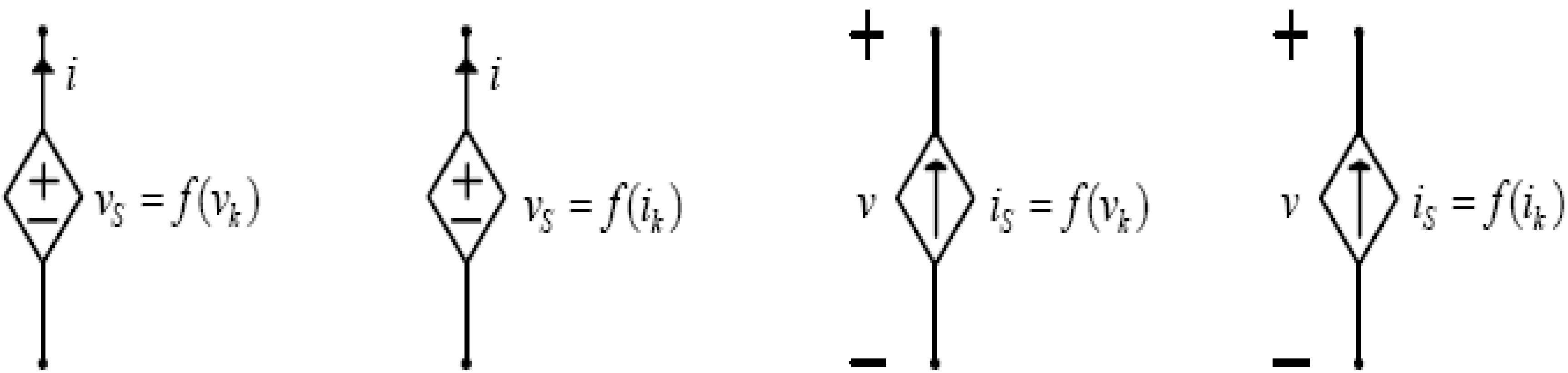
Μια άλλη κατηγορία πηγών είναι οι εξαρτημένες πηγές τάσης ή ρεύματος. Εξαρτημένη ή ελεγχόμενη πηγή τάσης (ρεύματος) είναι ένα στοιχείο δύο ακροδεκτών, του οποίου η τάση (ρεύμα) κλάδου είναι συνάρτηση της τάσης ή του ρεύματος κάποιου άλλου κλάδου του κυκλώματος.

Πηγές τάσης και ρεύματος

Υπάρχουν τέσσερις τύποι εξαρτημένων πηγών, δύο για τις πηγές τάσης και δύο για τις πηγές ρεύματος. Οι τύποι αυτοί είναι:

- πηγή τάσης ελεγχόμενη από τάση (VCVS: Voltage Controlled Voltage Source).
- πηγή τάσης ελεγχόμενη από ρεύμα (CCVS: Current Controlled Voltage Source).
- πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από τάση (VCCS: Voltage Controlled Current Source).
- πηγή ρεύματος ελεγχόμενη από ρεύμα (CCCS: Current Controlled Current Source).

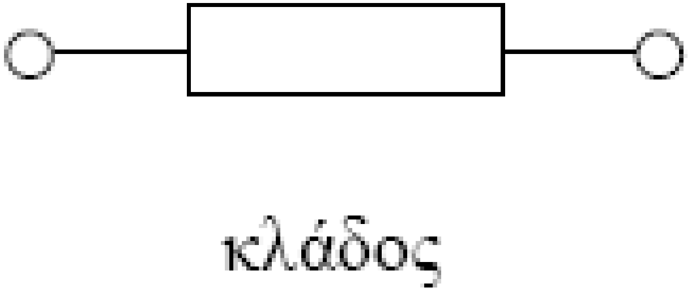
Πηγές τάσης και ρεύματος



(α) VCVS (β) CCVS (γ) VCCS (δ) CCCS

Τοπολογικοί ορισμοί στα κυκλώματα

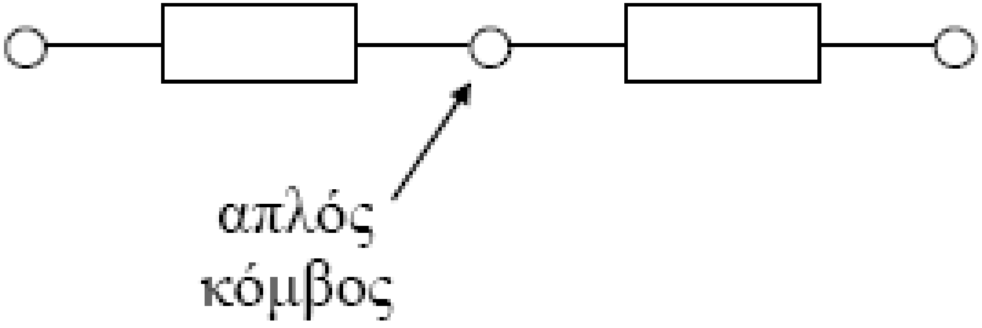
Κλάδος ενός κυκλώματος είναι στοιχείο δικτύου ή ομάδα στοιχείων που έχει δύο ακροδέκτες



Τοπολογικοί ορισμοί στα κυκλώματα

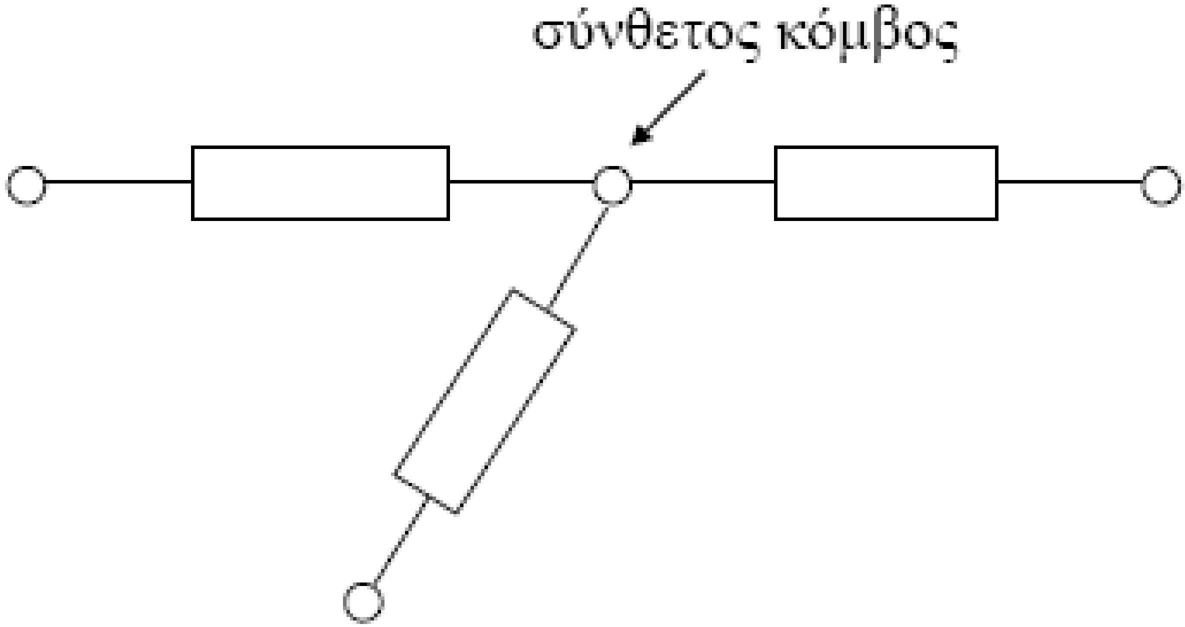
Κόμβος κυκλώματος καλείται ο κοινός ακροδέκτης (ή κοινό σημείο) δύο ή περισσοτέρων κλάδων.

Διακρίνουμε τον απλό κόμβο που συνδέει δυο κλάδους που μπορεί σε άλλη περίπτωση να παραληφθεί



Τοπολογικοί ορισμοί στα κυκλώματα

και το σύνθετο (ή απλά) κόμβο που είναι το κοινό σημείο τριών ή περισσοτέρων κλάδων.

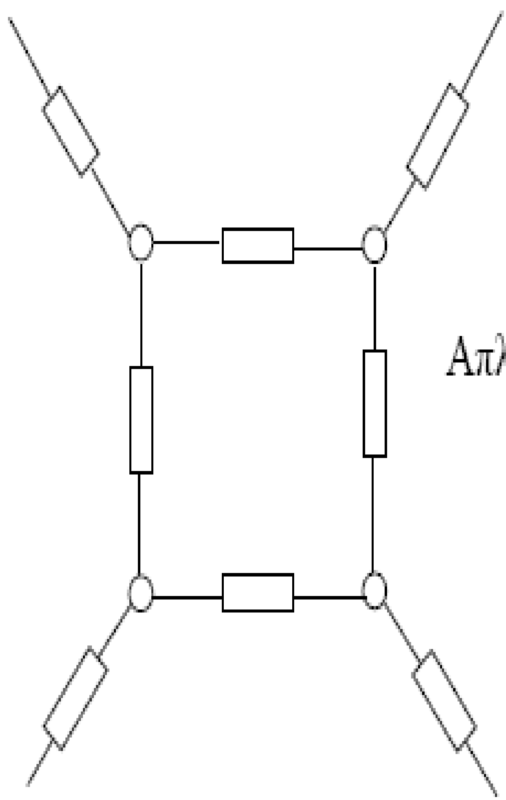


Τοπολογικοί ορισμοί στα κυκλώματα

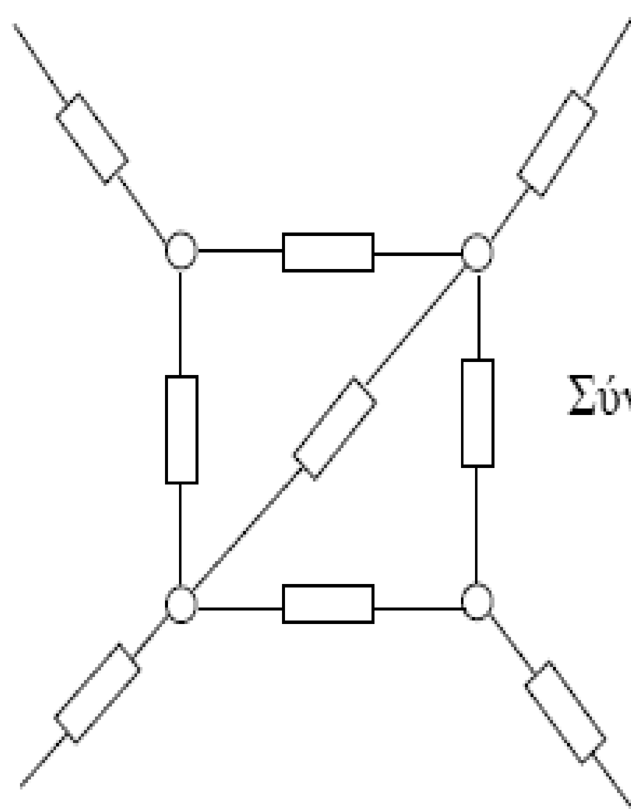
Βρόχος κυκλώματος καλείται μια κλειστή διαδρομή κλάδων όπου κάθε κλάδος περιέχεται μια μόνο φορά.

Διακρίνουμε και εδώ απλούς βρόχους που στο εσωτερικό τους δεν περιέχεται άλλος κλάδος του κυκλώματος και σύνθετους βρόχους .

Τοπολογικοί ορισμοί στα κυκλώματα



Απλός βρόχος



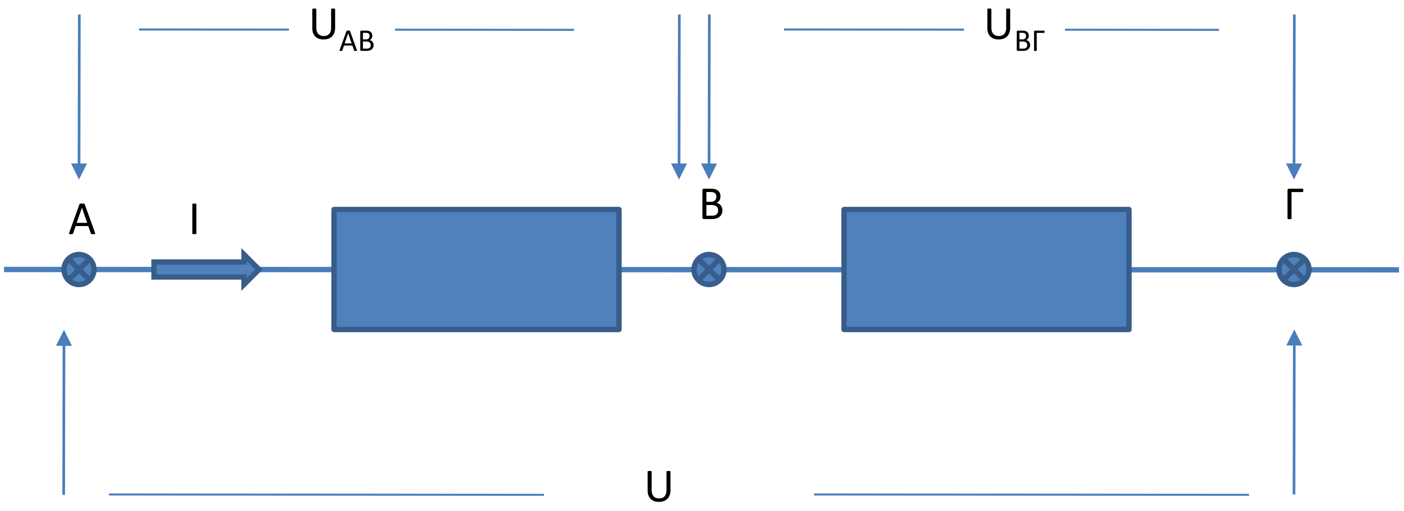
Σύνθετος βρόχος

Συνδεσμολογία στοιχείων

Υπάρχουν 3 διαφορετικές συνδεσμολογίες των στοιχείων:

1. Σε σειρά
2. Παράλληλα
3. Μεικτή

Συνδεσμολογία στοιχείων

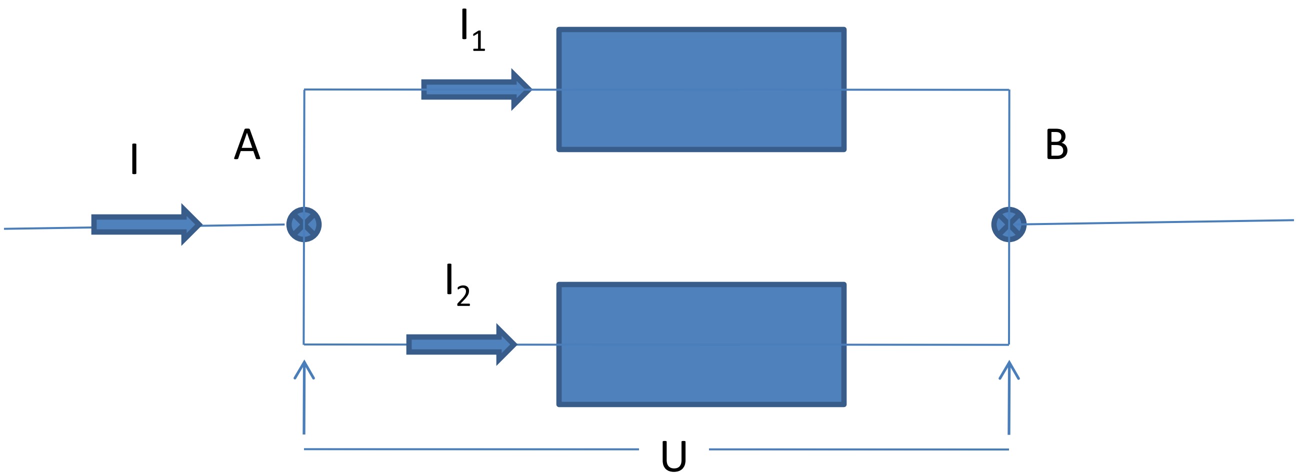


Τροφοδοσία στα άκρα Α – Γ

Συνδεσμολογία σε σειρά χαρακτηριστικό γνώρισμα I σταθερό

$$U_{A\Gamma} = U_{AB} + U_{B\Gamma}$$

Συνδεσμολογία στοιχείων

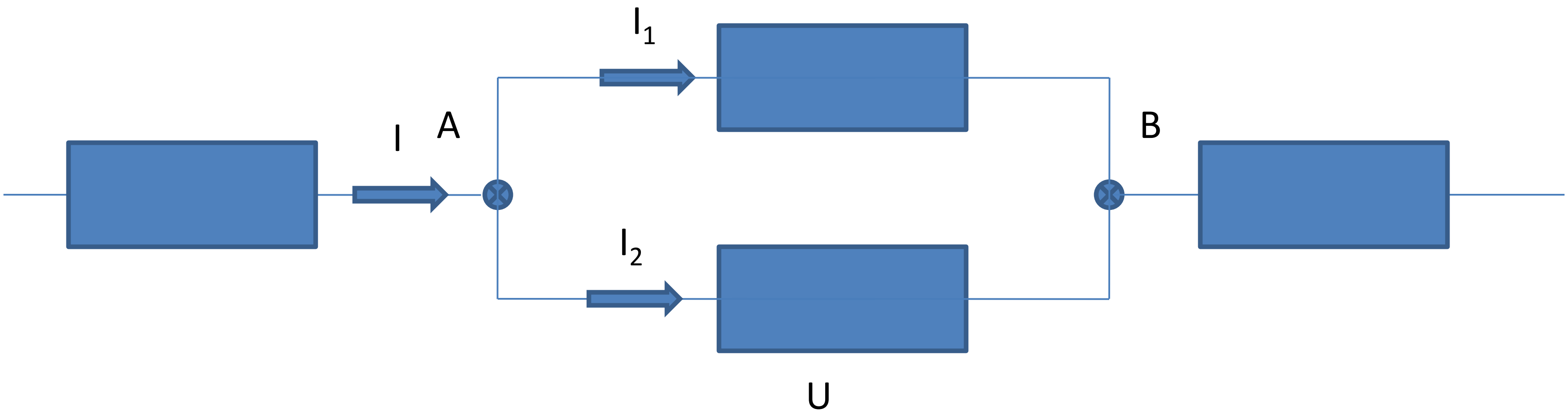


Τροφοδοσία στα άκρα Α – Β

Συνδεσμολογία παράλληλα χαρακτηριστικό γνώρισμα U σταθερό

$$I = I_1 + I_2$$

Συνδεσμολογία στοιχείων

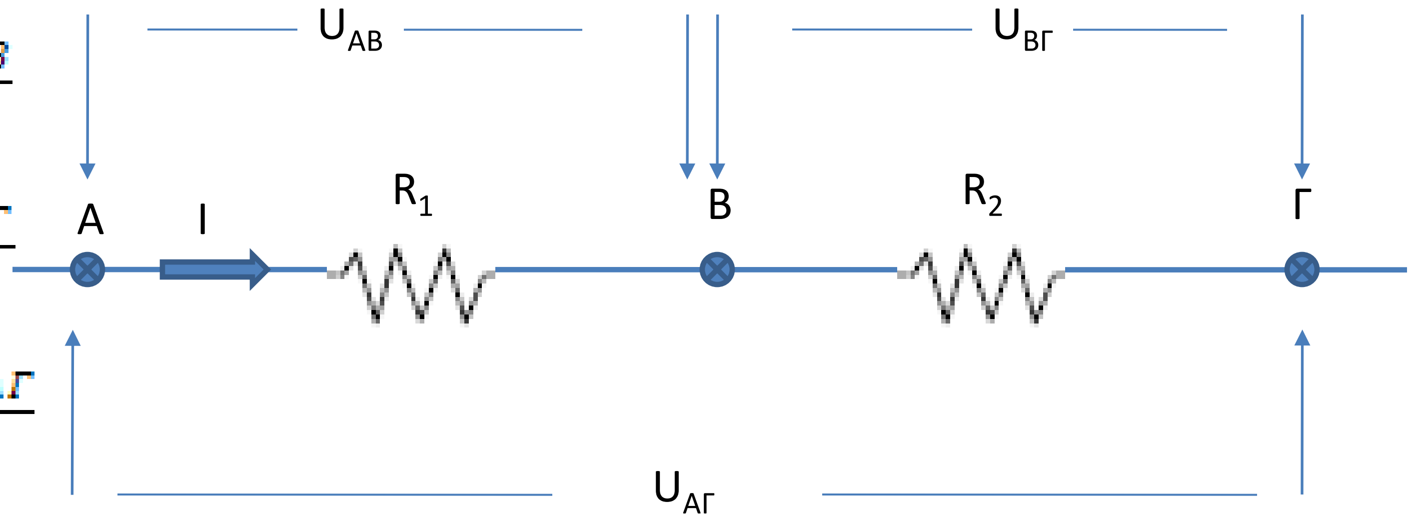


Αντιστάσεις σε σειρά

$$R_1 = \frac{U_{AB}}{I}$$

$$R_2 = \frac{U_{B\Gamma}}{I}$$

$$R_{o\lambda} = \frac{U_{A\Gamma}}{I}$$



$$U_{A\Gamma} = U_{AB} + U_{B\Gamma}$$

$$R_{o\lambda} * I = R_1 * I + R_2 * I$$

$$R_{o\lambda} = R_1 + R_2$$

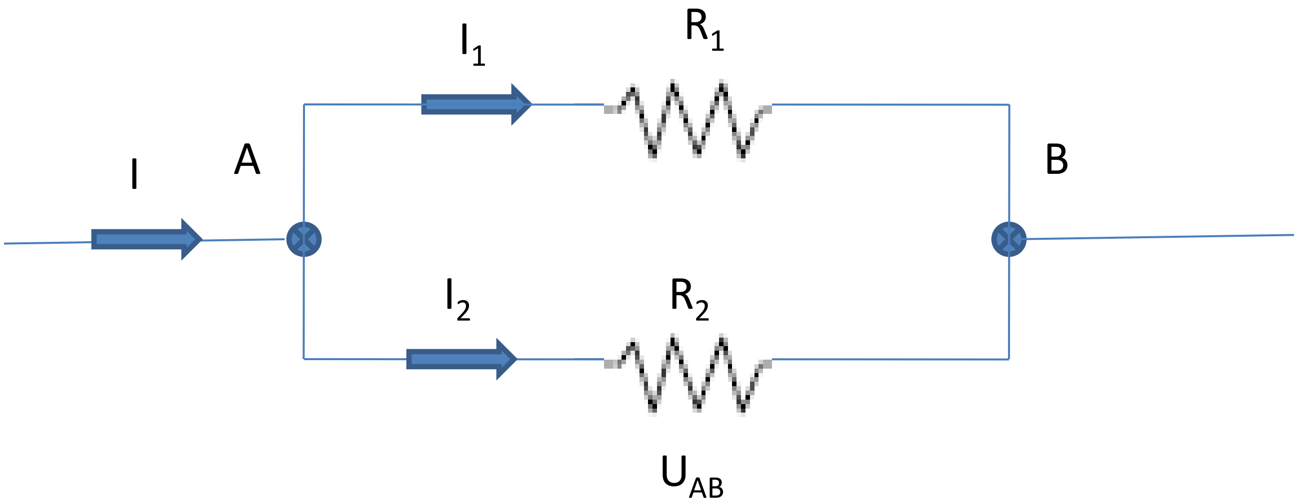
$$R_{o\lambda} = R_1 + R_2 + \ldots + R_\nu$$

Αντιστάσεις παράλληλα

$$R_1 = \frac{U_{AB}}{I_1}$$

$$R_2 = \frac{U_{AB}}{I_2}$$

$$R_{o\lambda} = \frac{U_{AB}}{I}$$



$I = I_1 + I_2$

$U_{AB} / R_{o\lambda} = U_{AB} / R_1 + U_{AB} / R_2$

$1 / R_{o\lambda} = 1 / R_1 + 1 / R_2$

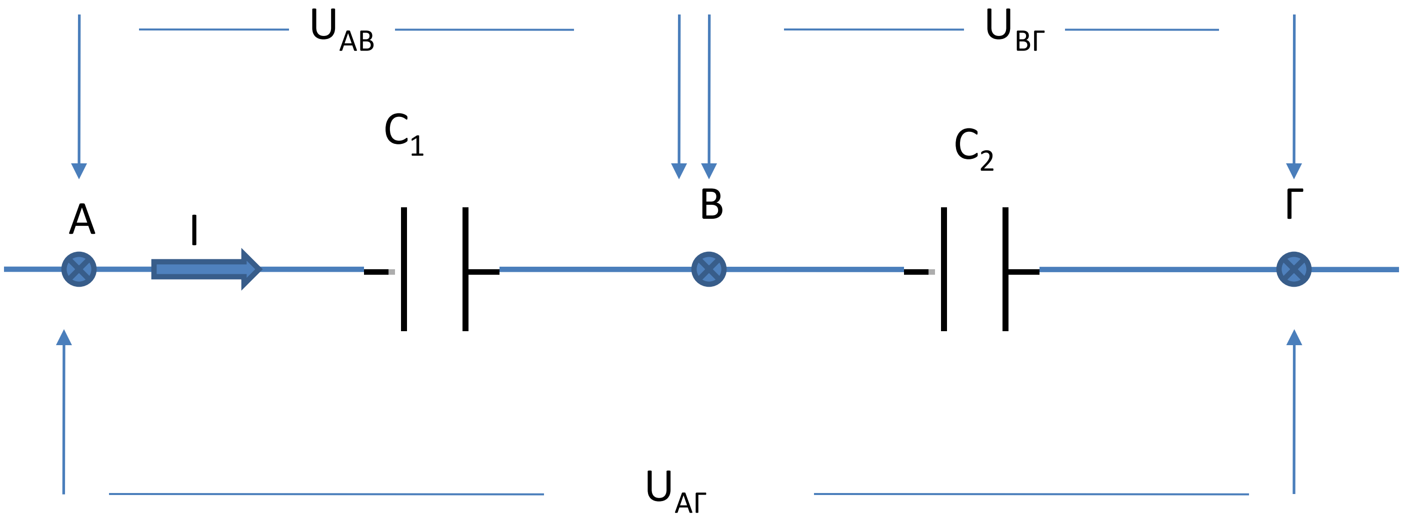
$$\frac{1}{R_{o\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_\nu}$$

Πυκνωτές σε σειρά

$$C_1 = \frac{Q}{U_{AB}}$$

$$C_2 = \frac{Q}{U_{B\Gamma}}$$

$$C_{o\lambda} = \frac{Q}{U}$$



$$I = \frac{Q}{t}$$

$U_{A\Gamma} = U_{AB} + U_{B\Gamma}$

$Q / C_{o\lambda} = Q / C_1 + Q / C_2$

$1 / C_{o\lambda} = 1 / C_1 + 1 / C_2$

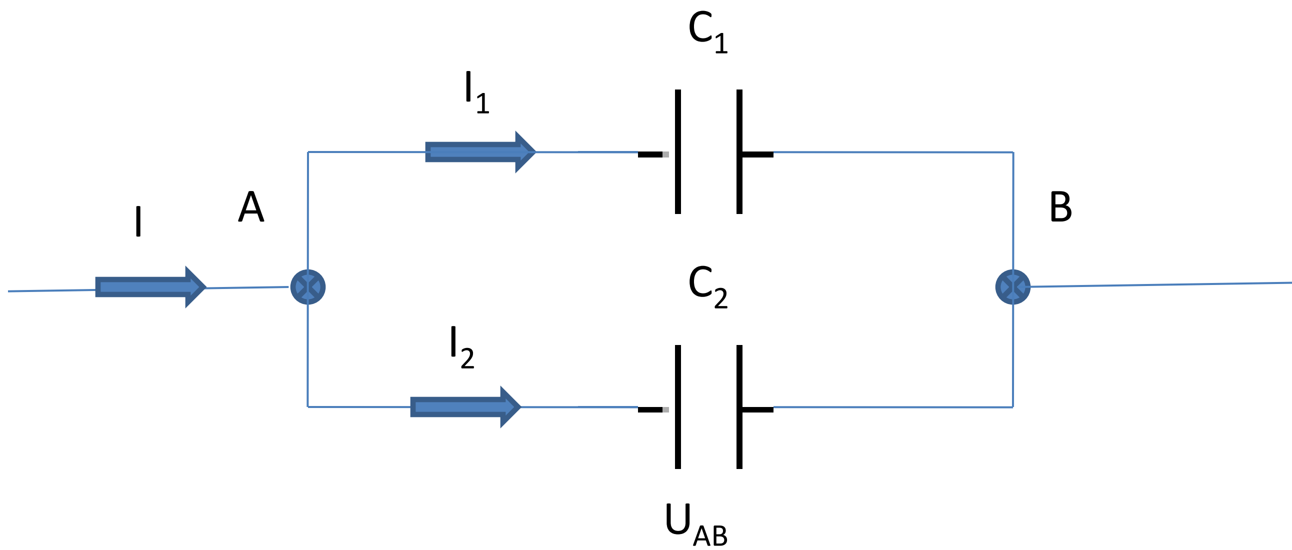
$$\frac{1}{C_{o\lambda}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}$$

Πυκνωτές παράλληλα

$$C_1 = \frac{Q}{U_{AB}}$$

$$C_2 = \frac{Q}{U_{B\Gamma}}$$

$$C_{o\lambda} = \frac{Q}{U}$$



$$I = \frac{Q}{t}$$

$$I = I_1 + I_2$$

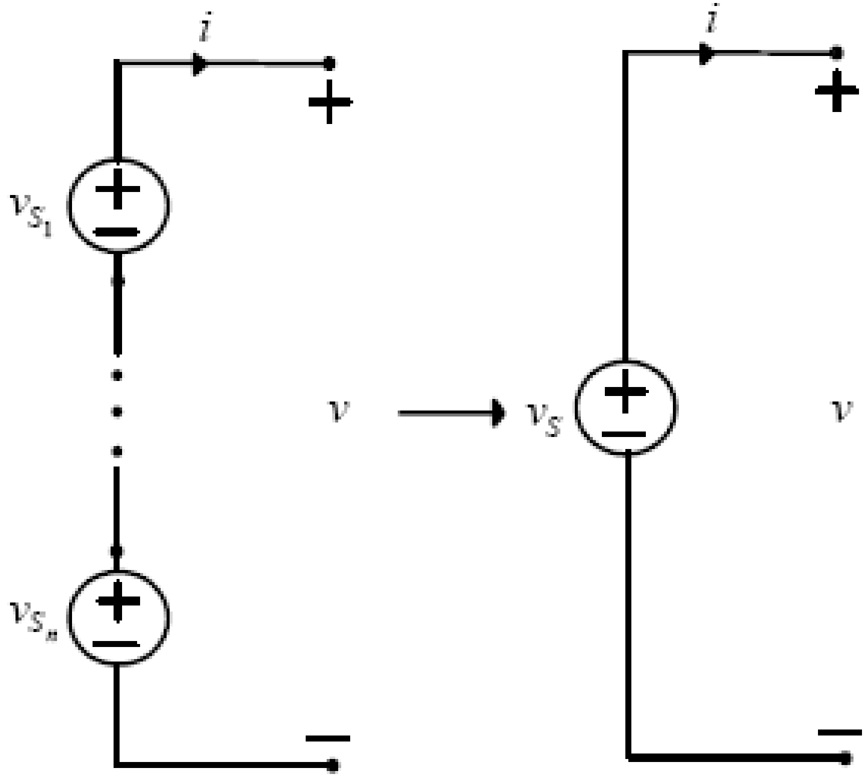
$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$C_{o\lambda} * U = C_1 * U + C_2 * U$$

$$C_{o\lambda} = C_1 + C_2$$

$$C_{o\lambda} = C_1 + C_2 + \ldots + C_\nu$$

Σύνδεση ιδανικών πηγών σε σειρά

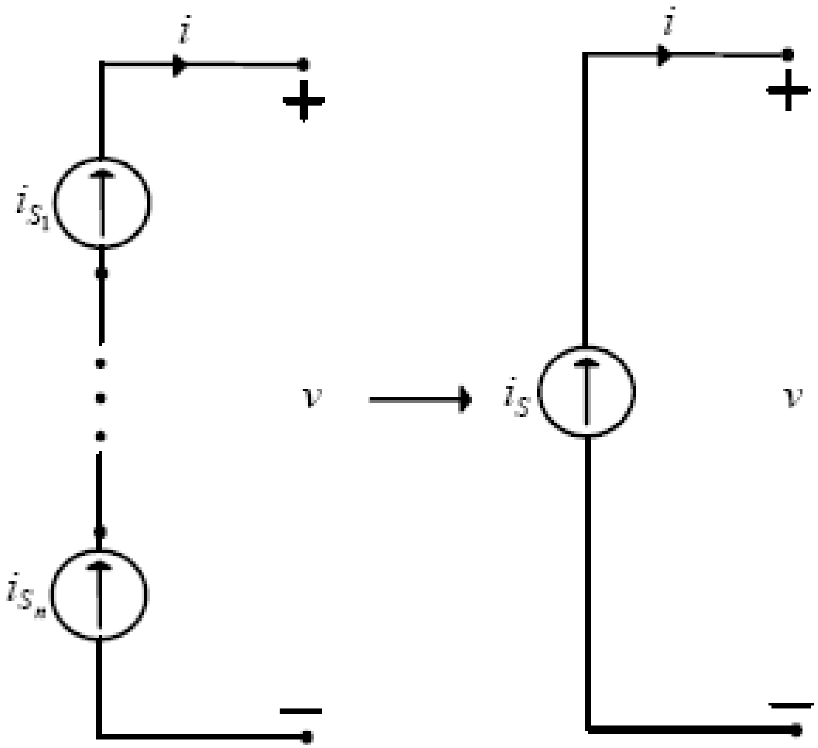


(α) πηγές τάσης

Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων, προκύπτει ότι η τάση της ισοδύναμης πηγής τάσης είναι ίση με το άθροισμα των τάσεων των πηγών που αποτελούν το συνδυασμό.

$$v_S = \sum_{j=1}^{n} v_{S_j}$$

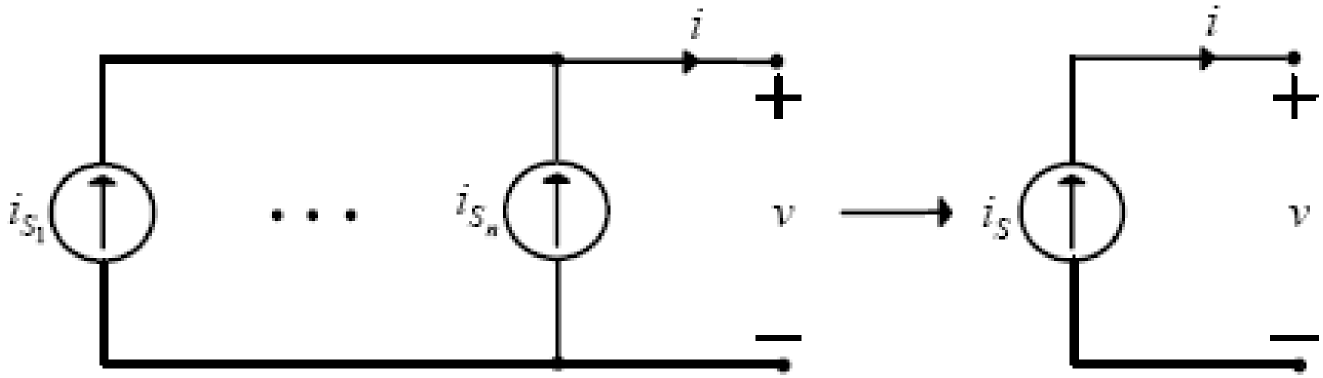
Σύνδεση ιδανικών πηγών σε σειρά



(β) πηγές ρεύματος

Είναι φανερό ότι για να ισχύει ο νόμος των ρευμάτων πρέπει τα ρεύματα των πηγών να είναι μεταξύ τους ίσα.
Με άλλα λόγια, **η σύνδεση σε σειρά ιδανικών πηγών ρεύματος με διαφορετικά ρεύματα είναι αδύνατη**

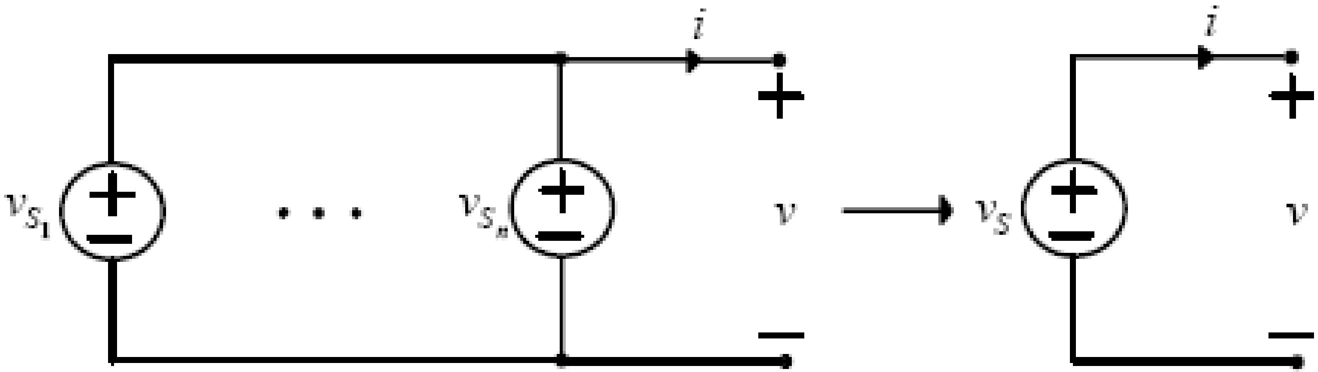
Παράλληλη σύνδεση ιδανικών πηγών



(α) πηγές ρεύματος

Εφαρμόζοντας το νόμο των ρευμάτων, προκύπτει ότι το ρεύμα της ισοδύναμης πηγής είναι ίσο με το άθροισμα των ρευμάτων των πηγών που αποτελούν το συνδυασμό

Παράλληλη σύνδεση ιδανικών πηγών



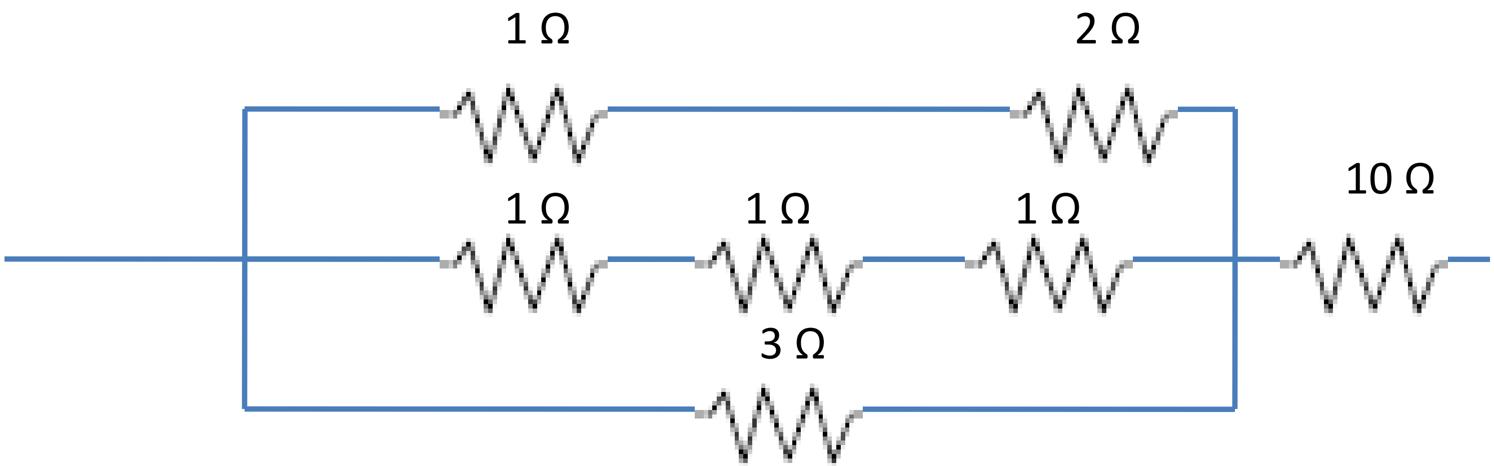
(β) πηγές τάσης

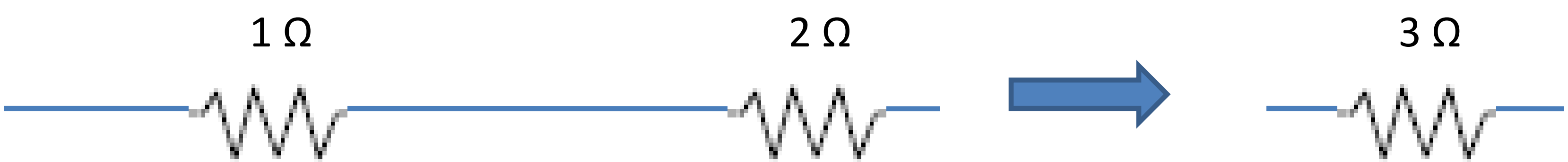
Στην περίπτωση της παράλληλης σύνδεσης *n ιδανικών πηγών τάσης, ο νόμος των τάσεων* απαιτεί οι τάσεις των πηγών να είναι μεταξύ τους ίσες.
Με άλλα λόγια, **η παράλληλη σύνδεση διαφορετικών ιδανικών πηγών τάσης είναι αδύνατη.**

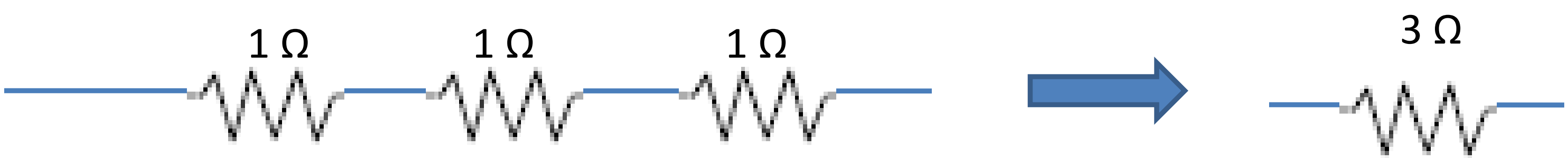
Τυπολόγιο

	Συνδεσμολογία	
	σε σειρά	**παράλληλα**
Αντιστάσεις	$R = R_1 + R_2 + \ldots$	$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots$
Πηνία	$L = L_1 + L_2 + \ldots$	$\frac{1}{L} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \ldots$
Πυκνωτές	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots$	$C = C_1 + C_2 + \ldots$
Μιγαδικές αντιστάσεις	$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots$	$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \ldots$
Πηγές τάσης	$v = v_1 + v_2 + \ldots$ αλγεβρικό άθροισμα	$v = v_1 = v_2 = \ldots$
Πηγές ρεύματος	$i = i_1 = i_2 = \ldots.$	$i = i_1 + i_2 + \ldots$ αλγεβρικό άθροισμα

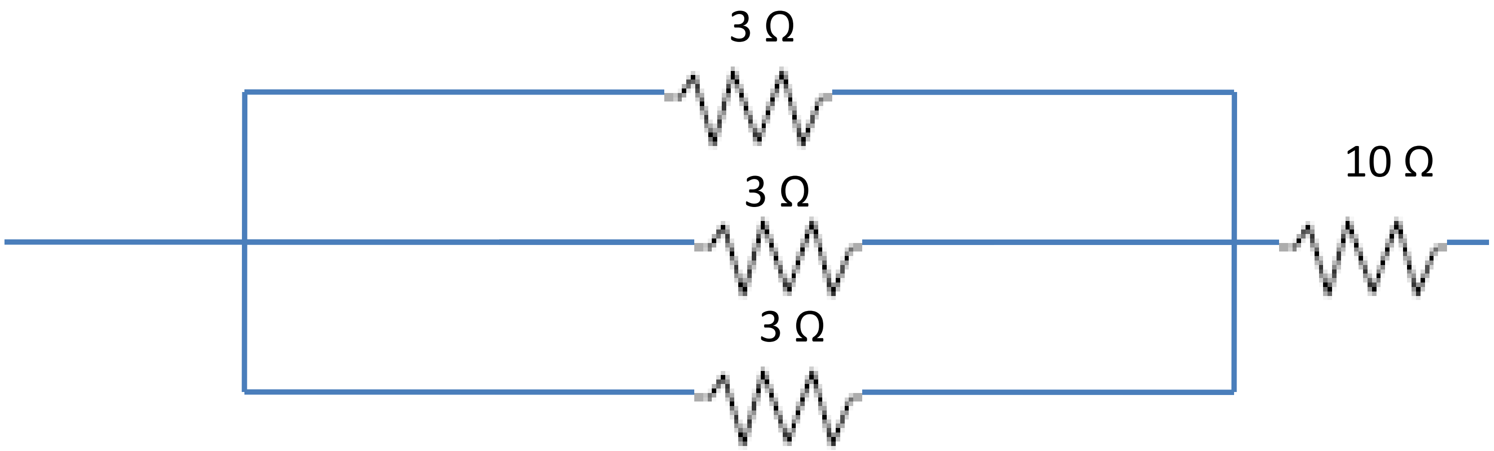
Ασκήσεις αντιστάσεων

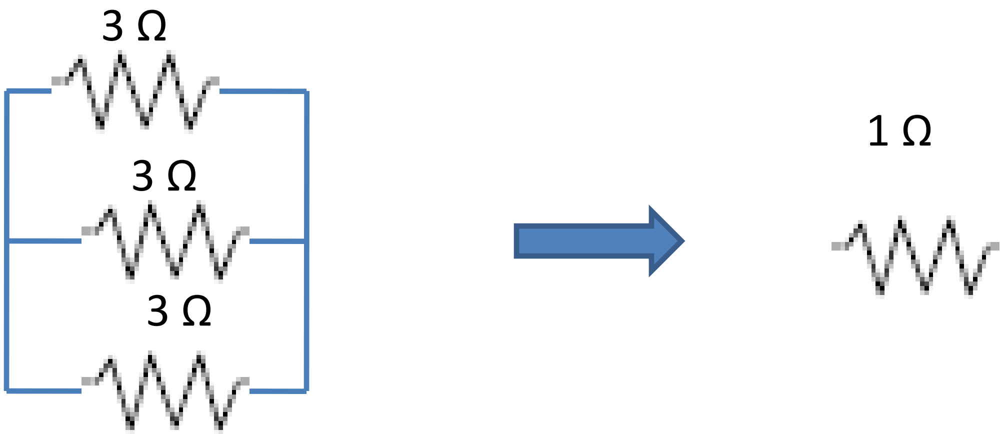




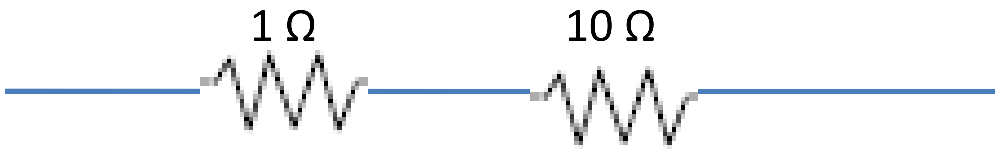


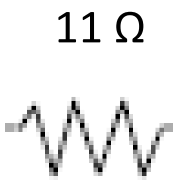
Ασκήσεις αντιστάσεων



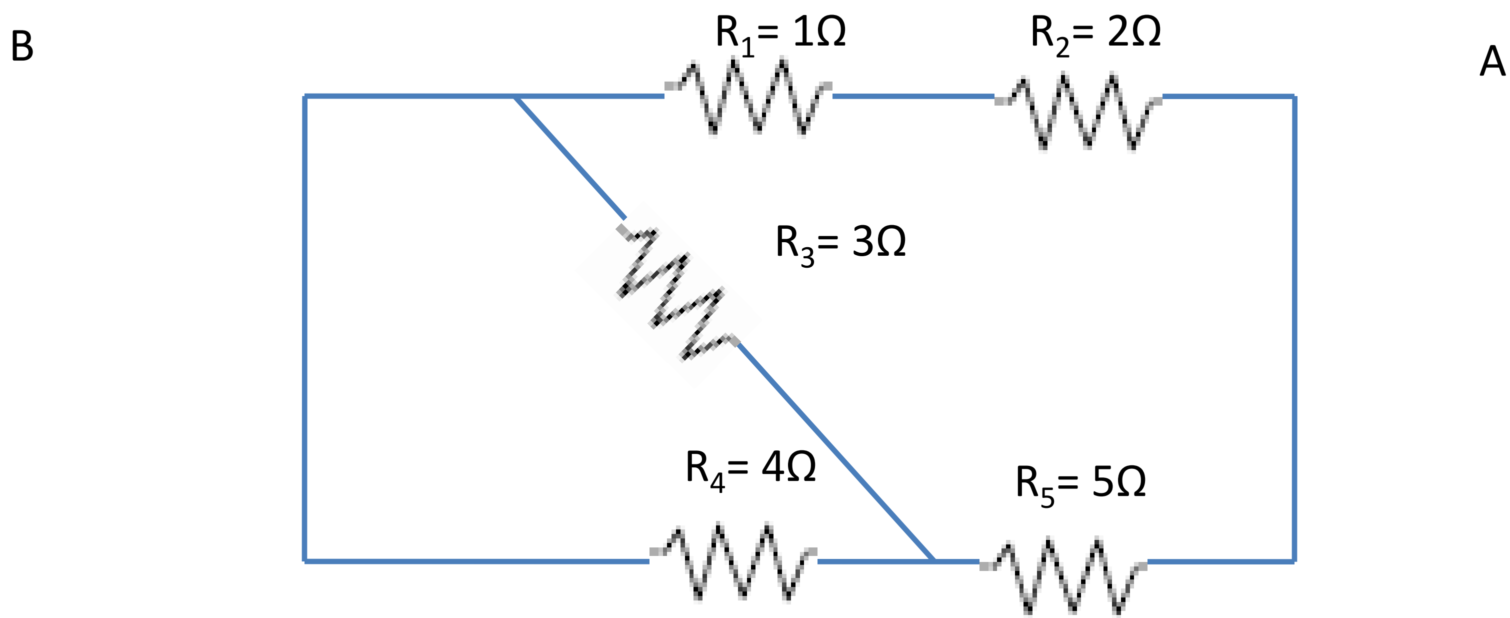


Ασκήσεις αντιστάσεων





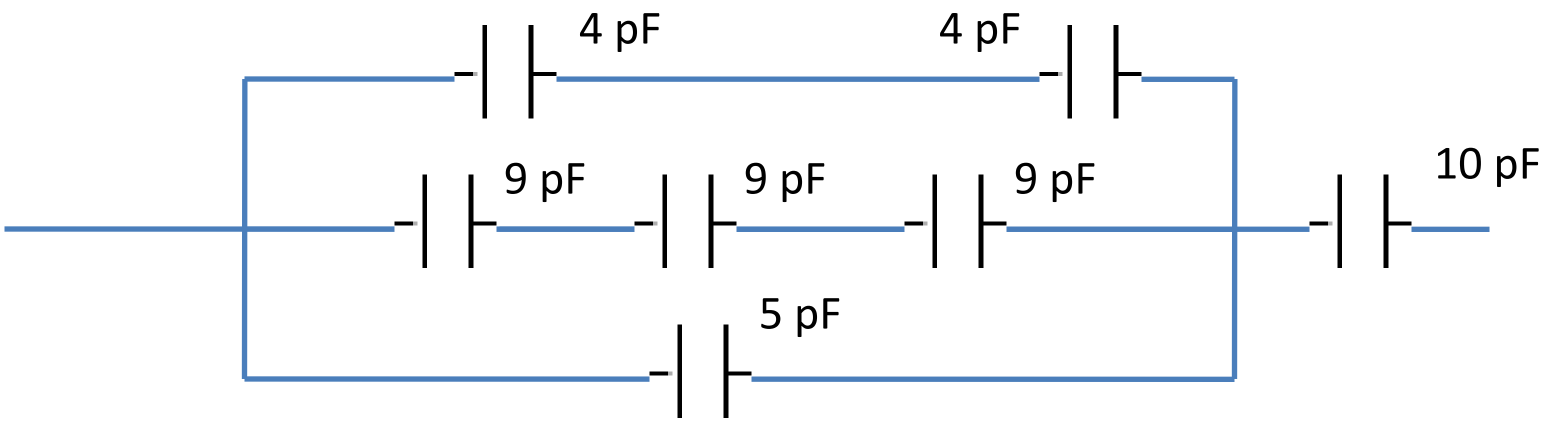
Ασκήσεις αντιστάσεων

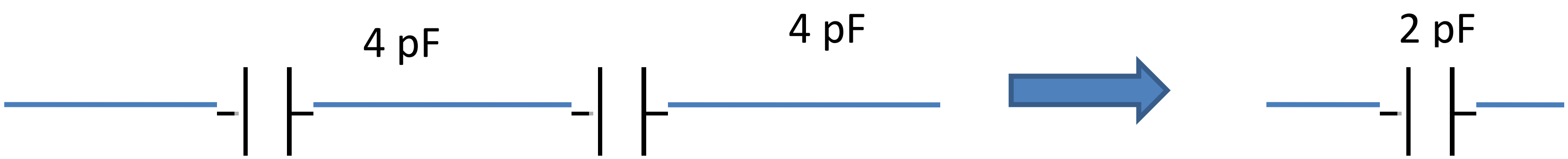


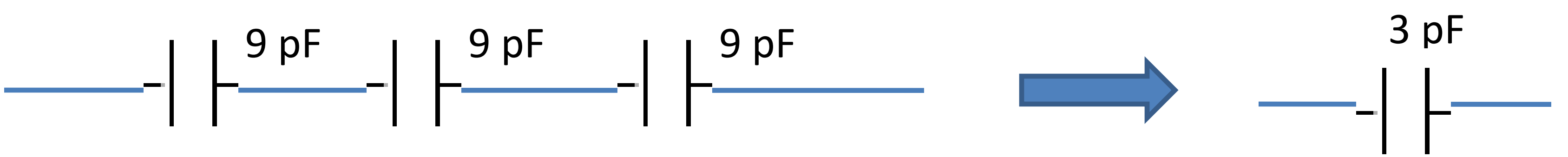
$R_{ολ}$= 9,7 Ω

$R_{ολ}$= 6,18 Ω

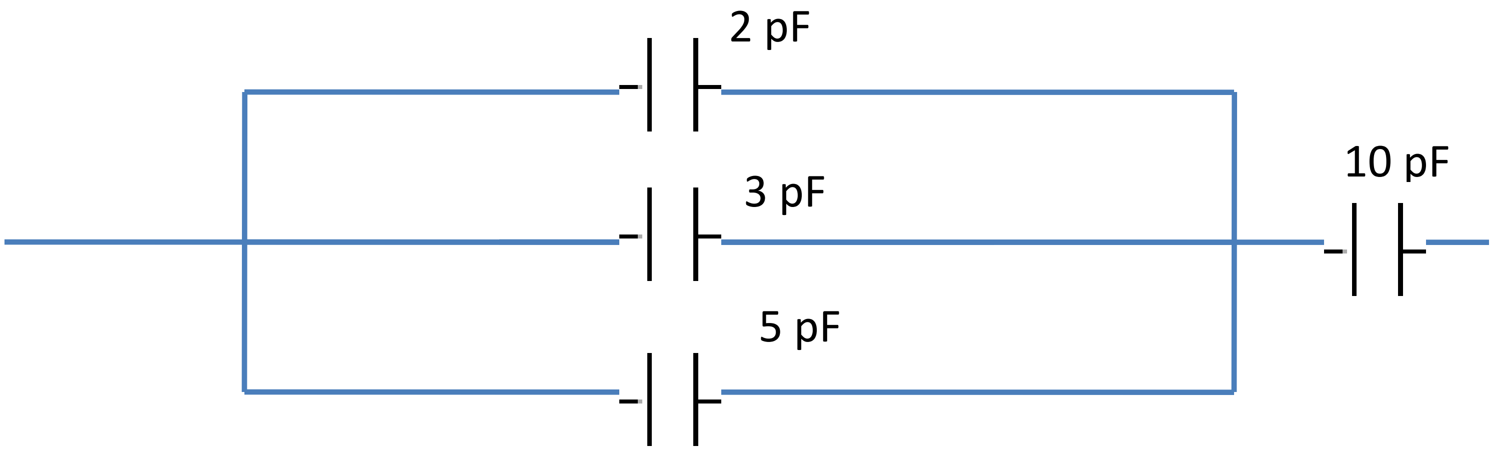
Ασκήσεις πυκνωτών

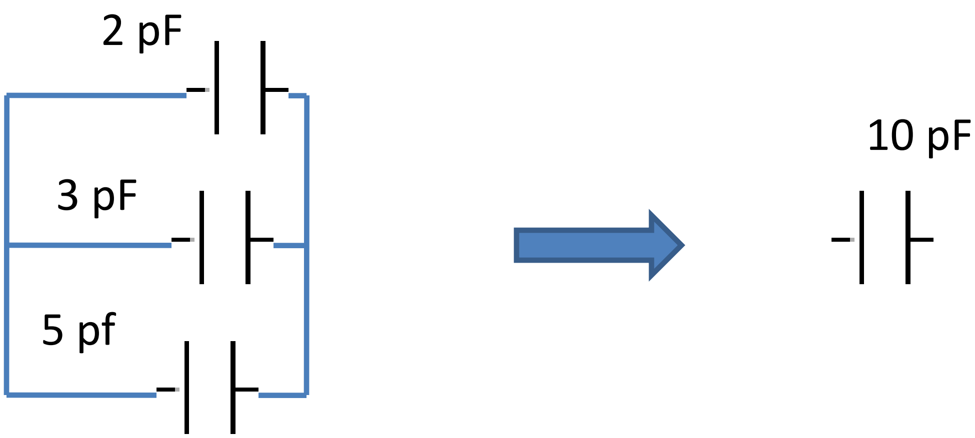




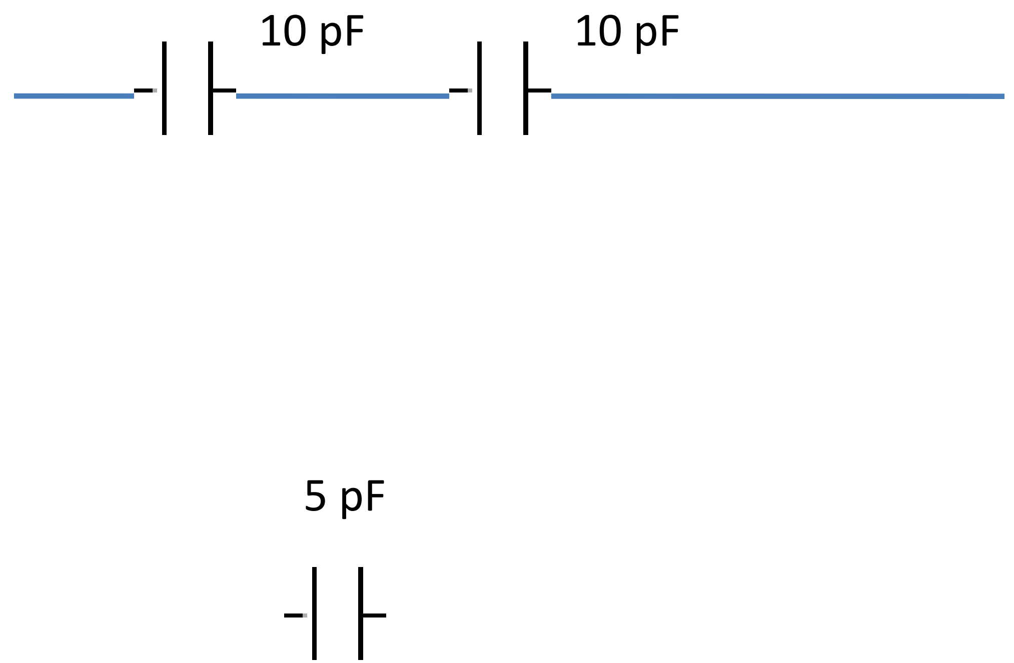


Ασκήσεις πυκνωτών

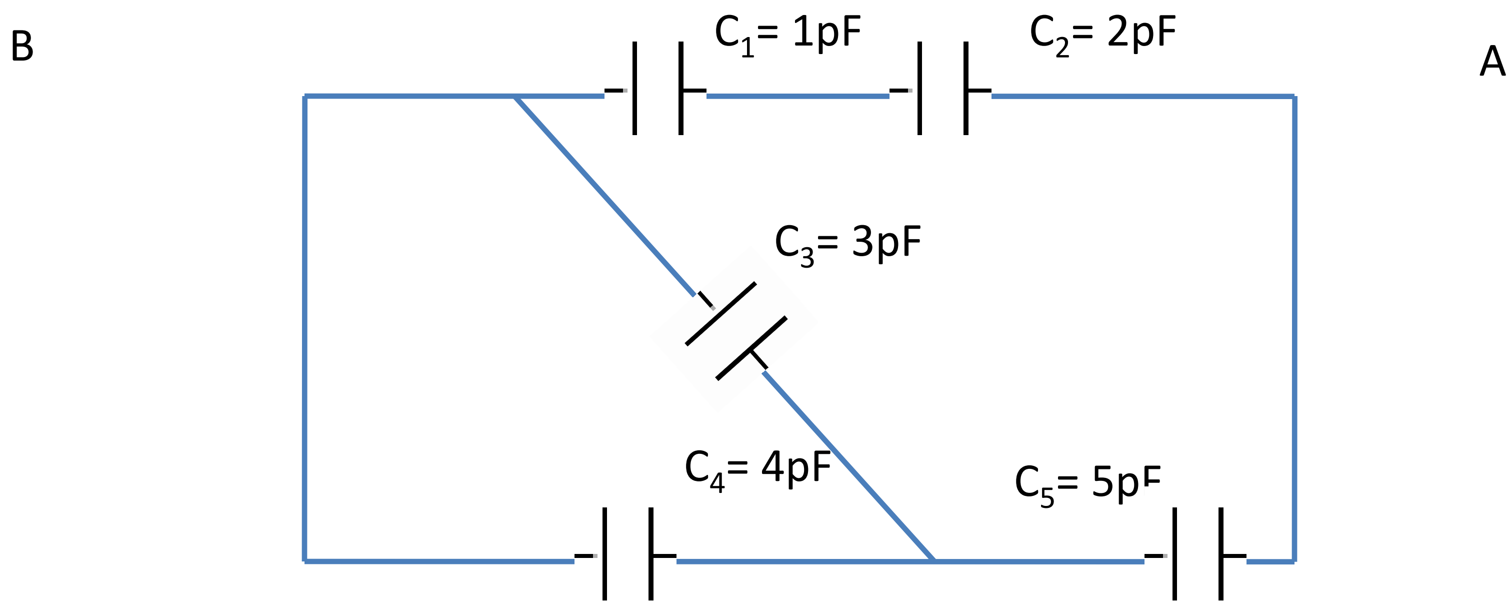




Ασκήσεις πυκνωτών



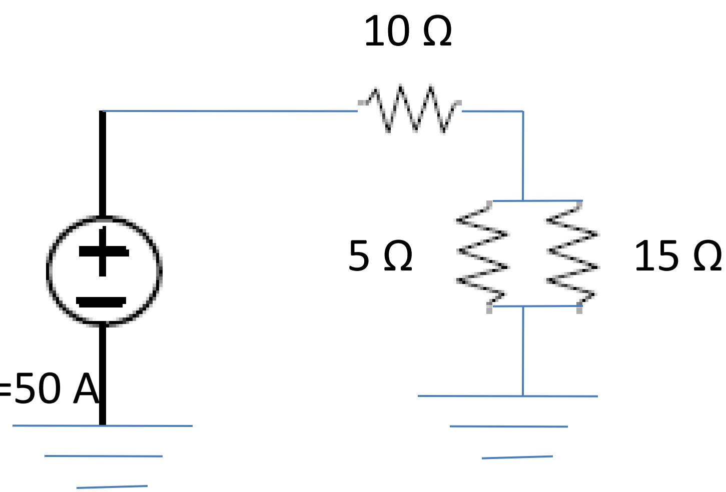
Ασκήσεις πυκνωτών



$C_{ολ}$= 0,54 pF

$C_{ολ}$= 1,9 pF

Ασκήσεις στο νόμο του OHM



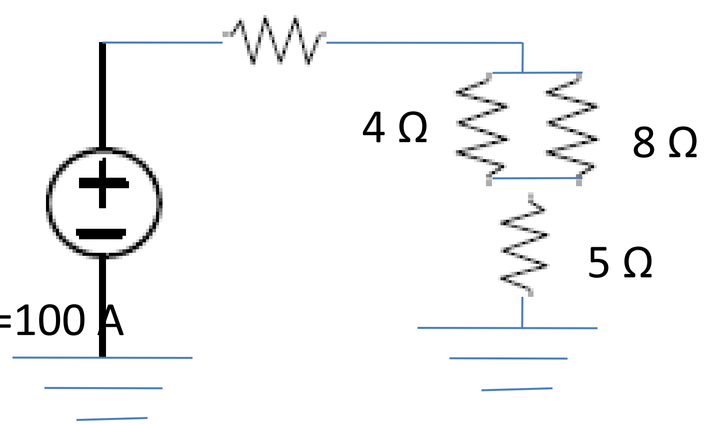
$$R = \frac{5 \times 15}{5 + 15} = 3.75\ \Omega$$

$R_{ολ} = 10 + 3,75 = 13,75\ \Omega$

$$r = \frac{E}{I_{βραχ}} = 1\ \Omega$$

$$I = \frac{E}{R_{ολ}+r} = \frac{50}{13.75+1} = 3.38\ A$$

Ασκήσεις στο νόμο του ΟΗΜ



$I_{βραχ}$=100 A

$$R = \frac{4 \times 8}{4 + 8} = 2,66\ \Omega$$

$$R_{ολ} = 3 + 2,66 + 5 = 10,66\ \Omega$$

$$r = \frac{E}{I_{βραχ}} = 0,5\Omega$$

$r_κ = 0,1\Omega/m$ χρησιμοποιώ 5 μέτρα ⟹ $r_κ = 0,1\Omega \times 5m = 0,5\Omega$

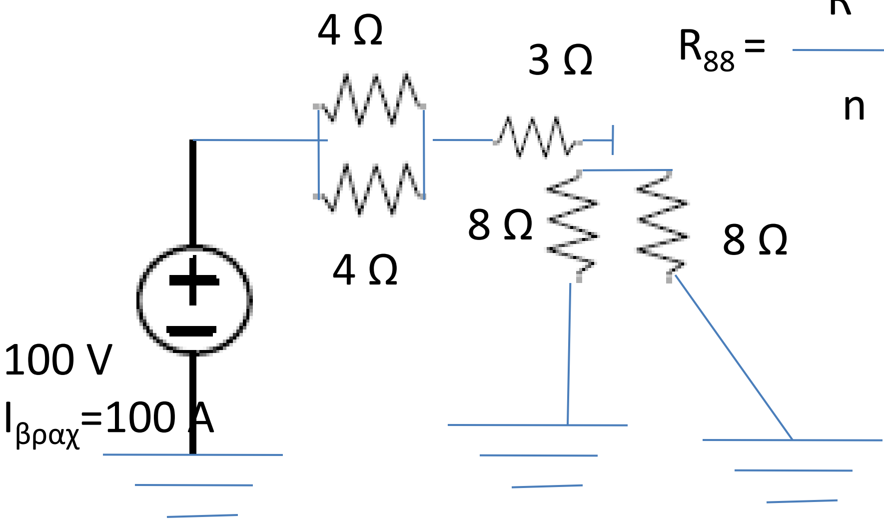
$$I = \frac{E}{R_{ολ}+r+r_κ} = \frac{50}{10,66+0,5+0,5} = 4,29\ A$$

$P_{κατ} = R_{ολ} \times I^2 = 10,66 \times 4,29^2 = 196,18\ W$

$P_{πηγ} = E \times I = 50 \times 4,29 = 214,5\ W$

$P_{απ} = P_{πηγ} - P_{κατ} = 214,5 – 196,18 = 18,32\ W$

Ασκήσεις στο νόμο του OHM



$$R_{88} = \frac{R}{n} = \frac{8}{2} = 4\ Ω \qquad R_{44} = \frac{R}{n} = \frac{4}{2} = 2\ Ω$$

Roλ= 2 + 3 + 4= 9 Ω

$$r = \frac{E}{I_{βραχ}} = 1\ Ω$$

$$I = \frac{E}{Roλ+r} = \frac{100}{9+1} = 10\ A$$

Α $P_{κατ} = R_{ολ} X\ I^2 = 9\ X\ 10^2 = 900\ W$ $P_{πηγ} = E\ X\ I = 100\ X\ 10 = 1000\ W$

Β $P_{3Ω} = R_{3Ω} X\ I^2 = 3\ X\ 10^2 = 300\ W$

Γ $n = \frac{P_{κατ}}{P_{πηγης}} = \frac{900}{1000}$ = 0,9 ή 90% το 0 <= n < 1

Ασκήσεις στο νόμο του ΟΗΜ

$$R_1 = \frac{U}{I_1}$$

$$R_1 = \frac{R_2 \text{ X } I_2}{I_1} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{I_2}{I_1}$$

$$R_2 = \frac{U}{I_2} \Rightarrow U = R_2 \text{ X } I_2$$

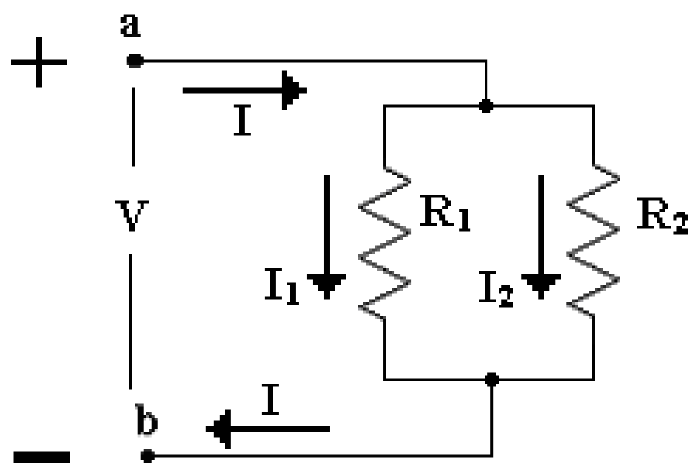
$$I = I_1 + I_2$$

$$\frac{8}{8} = \frac{I_2}{I_1} \Rightarrow I_2 = I_1$$

$$I = 2 \text{ X } I_1 \Rightarrow I_1 = 10 \text{ A} / 2 = 5 \text{ A} = I_2$$

Διαιρέτης Ρεύματος

<u>Διαιρέτης ρεύματος.</u> Ο διαιρέτης ρεύματος ισχύει μόνο για δύο κλάδους.

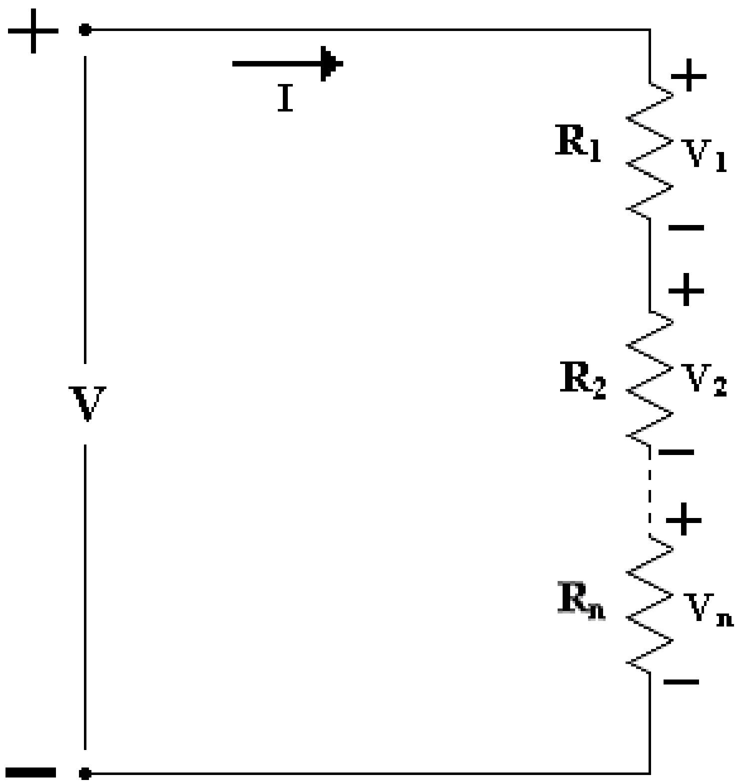


$$I_1 = I\,\frac{R_2}{R_1+R_2}$$

$$I_2 = I\,\frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Διαιρέτης Τάσης

<u>Διαιρέτης τάσης.</u> Όταν δύο οι περισσότερες αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες σε σειρά, τότε η τάση σε κάθε αντίσταση δίνεται από τις σχέσεις



$$V_1 = V \frac{R_1}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

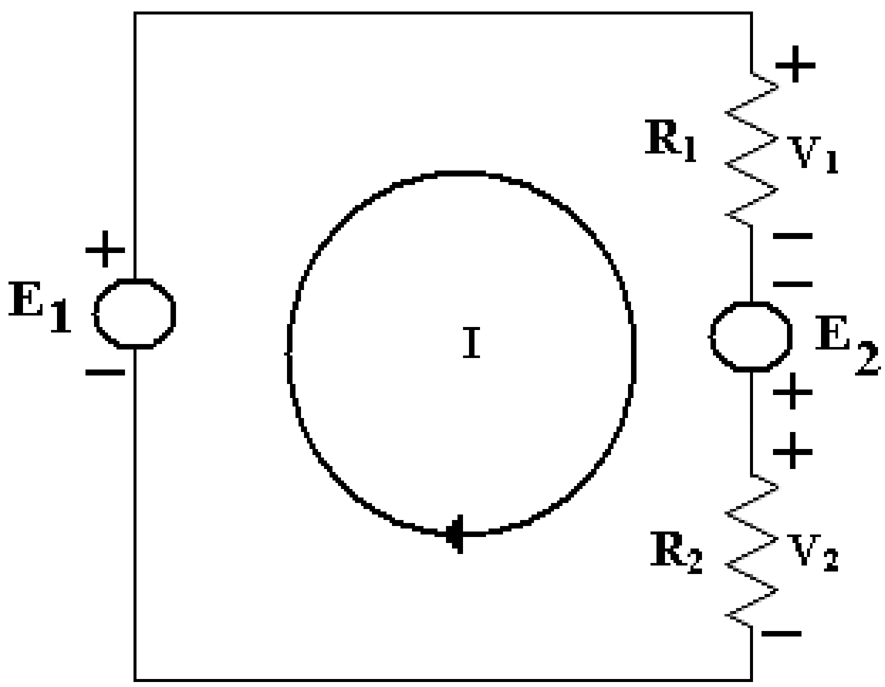
$$V_2 = V \frac{R_2}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

$$\vdots$$

$$V_n = V \frac{R_n}{R_1 + R_2 + \ldots + R_n}$$

Νόμος τάσεων KIRCHHOFF

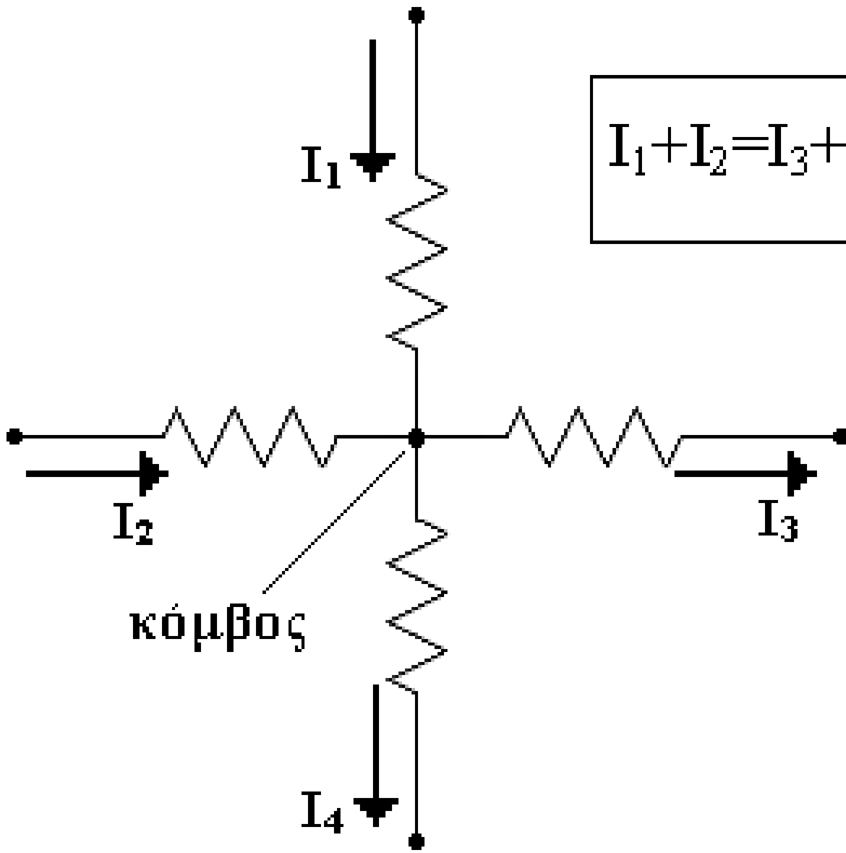
Σε κάθε κλειστό βρόχο το στιγμιαίο αλγεβρικό άθροισμα των πηγών, ισούται με τι στιγμιαίο αλγεβρικό άθροισμα των πτώσεων τάσης στους κλάδους του βρόχου



$$E_1+E_2=V_1+V_2$$
$$=IR_1+IR_2$$
$$=I\,(R_1+R_2)$$

Νόμος ρευμάτων KIRCHHOFF

Σε κάθε κόμβο κυκλώματος, το στιγμιαίο αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων των κλάδων που φθάνουν ή φεύγουν από τον κόμβο είναι μηδέν, σε κάθε χρονική στιγμή

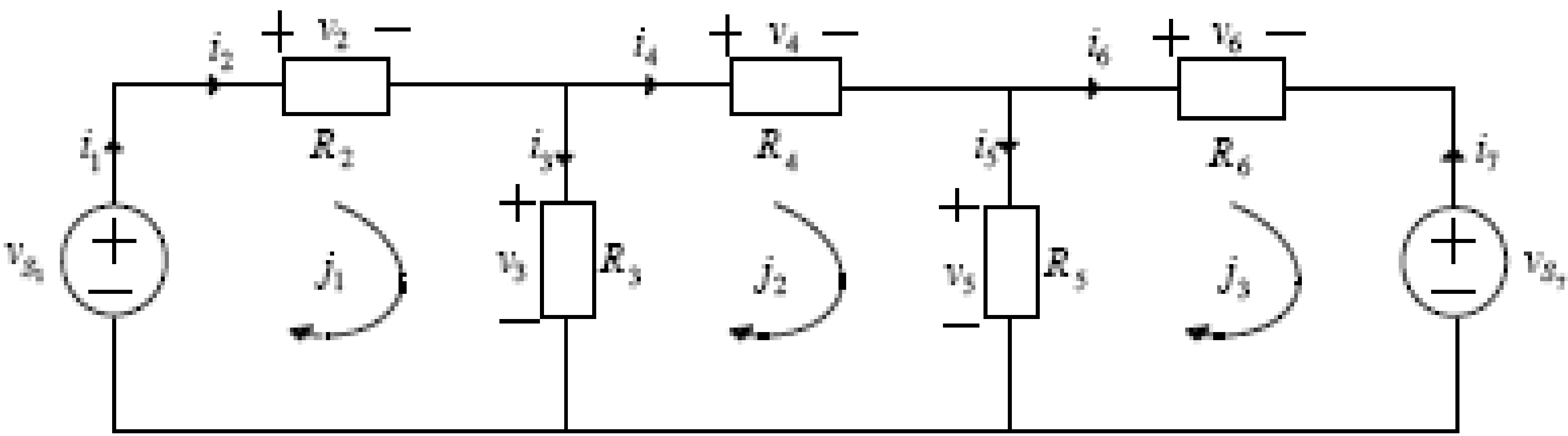


$$\boxed{I_1+I_2=I_3+I_4}$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Θεωρούμε το κύκλωμα του σχήματος το οποίο περιέχει μόνο ανεξάρτητες πηγές, είναι δηλαδή ένα παθητικό κύκλωμα. Το κύκλωμα αυτό έχει *b = 7 κλάδους και nt = 5 κόμβους.*

Από όλους τους δυνατούς βρόχους του κυκλώματος επιλέγονται οι **απλοί βρόχοι (mesh).** Ένας βρόχος ονομάζεται απλός όταν στο εσωτερικό του δεν περιέχει άλλους κλάδους. Χαρακτηριστικό των απλών βρόχων είναι ότι έχουν μόνο έναν κοινό κλάδο μεταξύ τους.



Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Θεωρούμε ότι κάθε απλός βρόχος διαρρέεται από ένα ρεύμα *ji (i =1,2,3), το* ***ρεύμα βρόχου*** (mesh current), που έχει φορά αναφοράς τη φορά περιστροφής των δεικτών του ρολογιού. Η φορά αυτή είναι και η φορά αναφοράς του απλού βρόχου.

Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι η γνώση των ρευμάτων βρόχων εξασφαλίζει τη γνώση όλων των μεταβλητών του κυκλώματος. Πραγματικά,

$$i_1 = j_1, \quad i_2 = j_1, \quad i_3 = j_1 - j_2, \quad i_4 = j_2,$$

$$i_5 = j_2 - j_3, \quad i_6 = j_3, \quad i_7 = -j_3$$

και

$$v_2 = R_2 j_1, \quad v_3 = R_3(j_1 - j_2), \quad v_4 = R_4 j_2,$$

$$v_5 = R_5(j_2 - j_3), \quad v_6 = R_6 j_3$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Εφαρμόζοντας το νόμο των τάσεων του Kirchhoff προκύπτει

$$\text{Βρόχος 1: } v_{g_1} - v_2 - v_3 = 0$$

$$\text{Βρόχος 2: } v_3 - v_4 - v_5 = 0$$

$$\text{Βρόχος 3: } v_5 - v_6 - v_{g_2} = 0$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Οι τάσεις v_i *στις προηγούμενες εξισώσεις αντικαθίστανται από τις v-i χαρακτηριστικές τους*

$$
\left.
\begin{array}{l}
v_{S_1} - R_2 j_1 - R_3 j_1 + R_3 j_2 = 0 \\[2em]
R_3 j_1 - R_3 j_2 - R_4 j_2 - R_5 j_2 + R_5 j_3 = 0 \\[2em]
R_5 j_2 - R_6 j_3 - R_6 j_3 - v_{S_7} = 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow
\left.
\begin{array}{r}
(R_2 + R_3) j_1 - R_3 j_2 = v_{S_1} \\[2em]
-R_3 j_1 + (R_3 + R_4 + R_5) j_2 - R_5 j_3 = 0 \\[2em]
-R_5 j_2 + (R_5 + R_6) j_3 = -v_{S_7}
\end{array}
\right\}
$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Το γραμμικό σύστημα των Εξισώσεων, με τη βοήθεια της συμβολικής γραφής των πινάκων, γράφεται με τη μορφή

$$\begin{bmatrix} R_2+R_3 & -R_3 & 0 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_5 & -R_5 \\ 0 & -R_5 & R_5+R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{S_1} \\ 0 \\ -v_{S_7} \end{bmatrix}$$

ή γενικότερα

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_{S_1} \\ \mathrm{E}_{S_2} \\ \mathrm{E}_{S_3} \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Το σύστημα των Εξισώσεων είναι ένα γραμμικό σύστημα με μεταβλητές τα ρεύματα βρόχων. Επιλύοντάς το υπολογίζουμε τα j_i *. Στη συνέχεια αντικαθιστούμε τα υπολογισθέντα ρεύματα* βρόχων στις πρώτες εξισώσεις και υπολογίζουμε τα ζητούμενα ρεύματα και τάσεις κλάδων. Η επίλυση του συστήματος γίνεται με εφαρμογή του κανόνα του Cramer και για την περίπτωση μας είναι

$$j_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \qquad j_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0}, \qquad j_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_0}$$

όπου

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix} \quad (4.2\text{-}7\alpha) \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E_{S_1} & R_{12} & R_{13} \\ E_{S_2} & R_{22} & R_{23} \\ E_{S_3} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E_{S_1} & R_{13} \\ R_{21} & E_{S_2} & R_{23} \\ R_{31} & E_{S_3} & R_{33} \end{vmatrix} \quad (4.2\text{-}7\gamma) \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E_{S_1} \\ R_{21} & R_{22} & E_{S_2} \\ R_{31} & R_{32} & E_{S_3} \end{vmatrix}$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Εάν $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ τότε ορίζουμε την **ορίζουσα του πίνακα ως τον αριθμό**

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

Εάν $A=\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ τότε $\det(A)=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=(-2)4-3\cdot 1=-8-3=-11$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Εάν $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$ τότε

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} -6 & 9 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0 + 15 + 150 = 165$$

Εδώ αναπτύξαμε την ορίζουσα ως προς την πρώτη γραμμή. Θα μπορούσαμε να την αναπτύξουμε ως προς οποιαδήποτε άλλη γραμμή ή στήλη. Θα πρέπει όμως να θυμόμαστε ότι το πρόσημο του γινομένου κάθε στοιχείου ή με την ελάσσονα ορίζουσα του είναι το αποτέλεσμα $(-1)^{i+j}$ *όπου η γραμμή i και η στήλη j του στοιχείου αντίστοιχα*

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Αν γενικεύσουμε τα παραπάνω για την περίπτωση κυκλώματος με *l απλούς βρόχους, οι* εξισώσεις βρόχων γράφονται

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1l} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{l1} & R_{l2} & \cdots & R_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \cdots \\ j_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{E}_{S_1} \\ \mathrm{E}_{S_2} \\ \cdots \\ \mathrm{E}_{S_l} \end{bmatrix}$$

γενικότερα

$$R_m \underline{J} = \underline{E}_S$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Ο πίνακας *Rm ονομάζεται* ***πίνακας αντιστάσεων απλών βρόχων. Το διάνυσμα J*** αποτελείται από τις μεταβλητές του συστήματος εξισώσεων, δηλαδή τα ρεύματα βρόχων, ενώ το διάνυσμα *E S περιλαμβάνει τις διεγέρσεις και ονομάζεται* ***διάνυσμα πηγών τάσης των απλών*** **βρόχων. Κάθε στοιχείο του *E S αποτελείται από το αλγεβρικό άθροισμα των πηγών τάσης που*** συμμετέχουν στον αντίστοιχο βρόχο.

i) Τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου *Rii (i =1,2,3) του πίνακα Rm είναι το άθροισμα των* αντιστάσεων των κλάδων που σχηματίζουν το βρόχο *i . Το στοιχείο Rii ονομάζεται* ***ιδία*** **αντίσταση ή αυτοαντίσταση του βρόχου *i .***

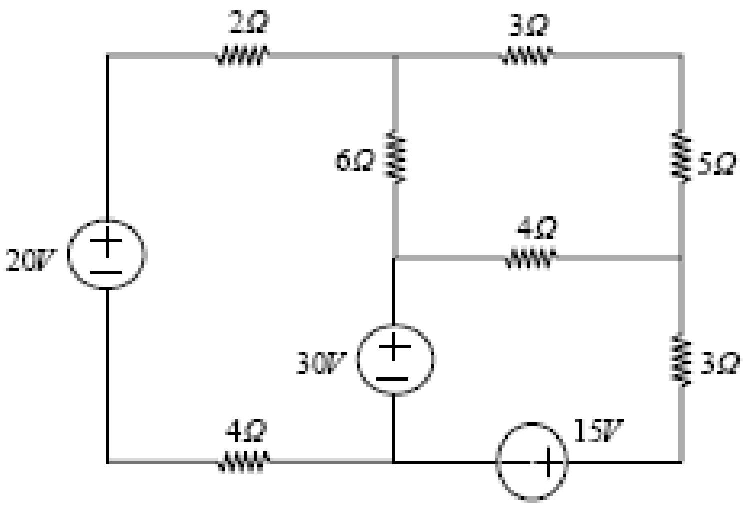
ii) Τα στοιχεία *Rik (i,k =1,2,3 , i≠k), που βρίσκονται εκατέρωθεν της κύριας διαγωνίου, είναι* το **αρνητικό άθροισμα των αντιστάσεων που είναι κοινές στους βρόχους *i και k . Το*** στοιχείο *Rik ονομάζεται* ***αμοιβαία αντίσταση των βρόχων i και k .***

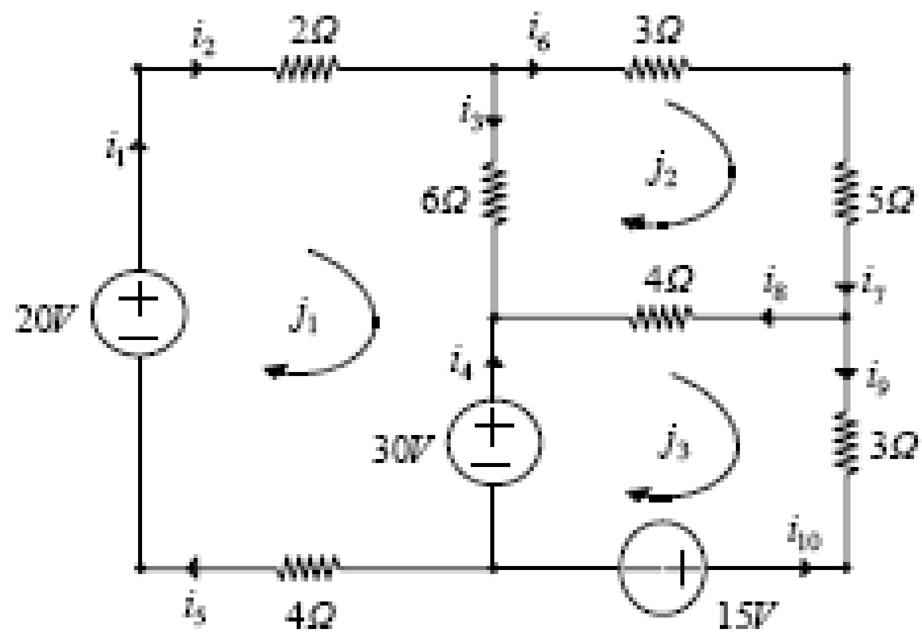
iii) Ο πίνακας αντιστάσεων απλών βρόχων *Rm είναι* ***συμμετρικός, δηλαδή Rij =Rji .***

iv) Οι πηγές τάσης με φορά τη φορά του βρόχου στον οποίο ανήκουν θεωρούνται θετικές, ενώ εκείνες με αντίθετη φορά θεωρούνται αρνητικές.

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Να υπολογιστούν τα ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους





Εφόσον δεν έχουν ορισθεί οι φορές των ρευμάτων κλάδων τις καθορίζουμε αυθαίρετα

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Γράφουμε υπό μορφή πινάκων τις εξισώσεις βρόχων

$$\begin{bmatrix} 2+6+4 & -6 & 0 \\ -6 & 3+5+4+6 & -4 \\ 0 & -4 & 4+3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20-30 \\ 0 \\ 30-15 \end{bmatrix}$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Από τις παραπάνω εξισώσεις υπολογίζουμε τα ρεύματα βρόχων

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} 12 & -6 & 0 \\ -6 & 18 & -4 \\ 0 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 1068 \qquad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -10 & -6 & 0 \\ 0 & 18 & -4 \\ 15 & -4 & 7 \end{vmatrix} = -740$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 12 & -10 & 0 \\ -6 & 0 & -4 \\ 0 & 15 & 7 \end{vmatrix} = 300 \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 12 & -6 & -10 \\ -6 & 18 & 0 \\ 0 & -4 & 15 \end{vmatrix} = 2460$$

$$j_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = -0.69A \qquad j_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} = 0.28A \qquad j_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_0} = 2.3A$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Η τιμή του j_1 *προέκυψε αρνητική. Αυτό σημαίνει πως το ρεύμα* j_1 *έχει* πραγματική φορά αντίθετη από αυτήν που καθορίσαμε, είναι δηλαδή αριστερόστροφο. Ωστόσο, στους υπολογισμούς που ακολουθούν διατηρούνται όπως έχουν τόσο η φορά όσο και το πρόσημο, εφόσον **στη μέθοδο των απλών βρόχων τα ρεύματα βρόχων δεν είναι οι πραγματικές μεταβλητές του κυκλώματος για να έχουν φυσική σημασία. Είναι ενδιάμεσες μεταβλητές, δηλαδή εργαλεία για τον υπολογισμό των φυσικών μεταβλητών, οι οποίες είναι τα ρεύματα και οι τάσεις κλάδων.**

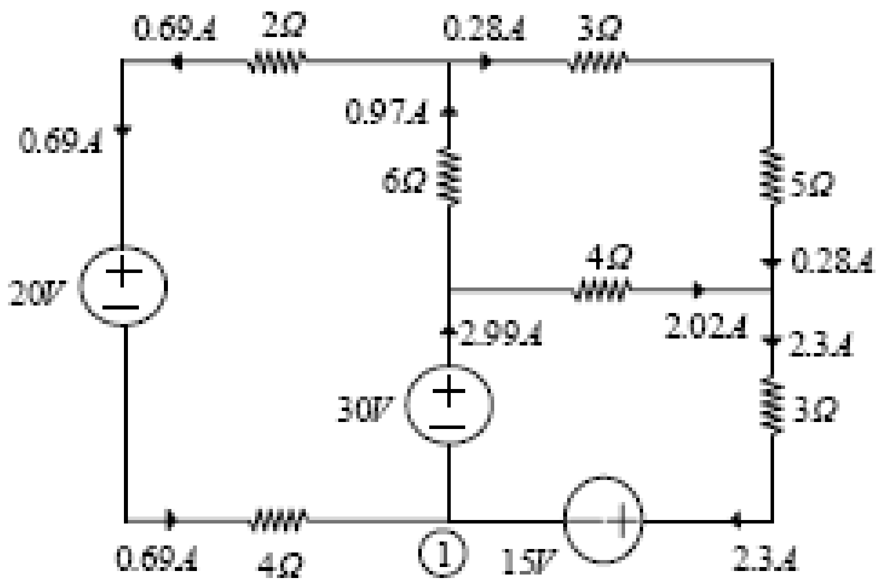
Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

Έχοντας υπολογίσει τα ρεύματα βρόχων, επανερχόμαστε στο κύκλωμα και υπολογίζουμε τα ρεύματα που διαρρέουν τους κλάδους του κυκλώματος.

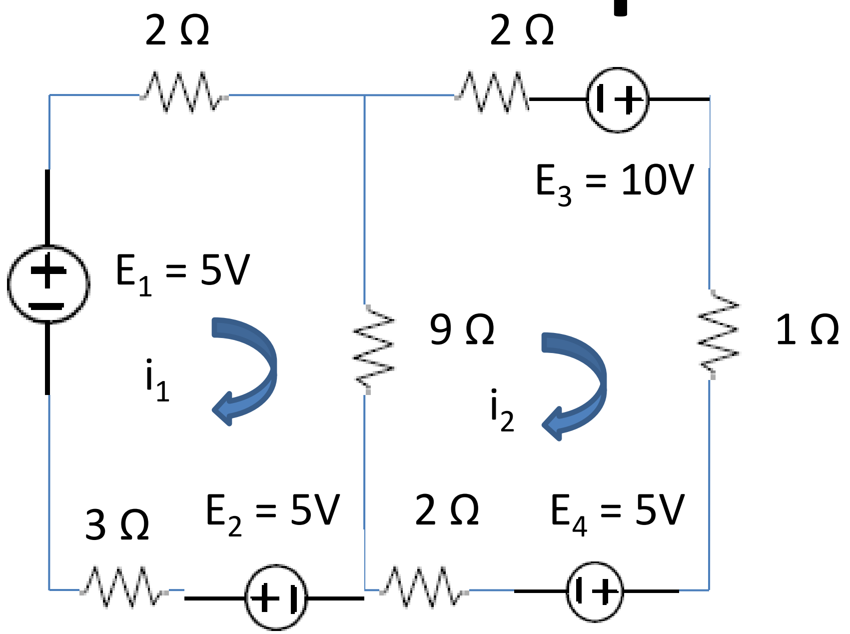
$$i_1 = i_2 = i_5 = j_1 = -0.69A \qquad i_4 = j_3 - j_1 = 2.3 + 0.69 = 2.99A \qquad i_6 = i_7 = j_2 = 0.28A$$

$$i_3 = j_1 - j_2 = -0.69 - 0.28 = -0.97A \qquad i_8 = j_2 - j_3 = 0.28 - 2.3 = -2.02A$$

$$i_9 = j_3 = 2.3A \qquad i_{10} = -j_3 = -2.3A$$



Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα



Πίνακας Αντιστάσεων

$\alpha_{11} = 2 + 9 + 3 = 14$

$\alpha_{22} = 2 + 1 + 2 + 9 = 14$

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -9$

Πίνακας πηγών

$e_1 = 5 + 5 = 10$

$e_2 = 10 - 5 = 5$

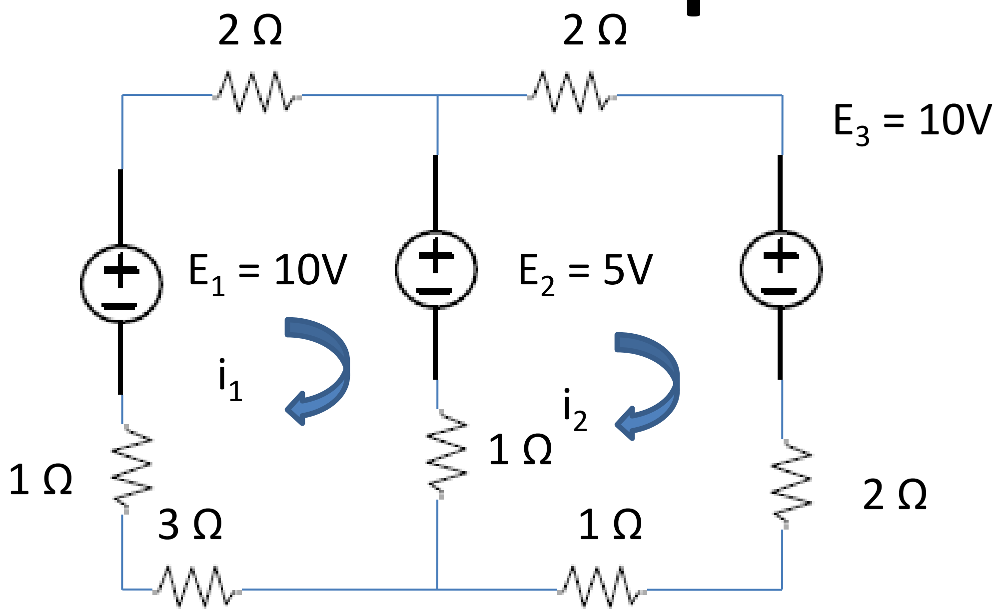
$$i_1 = \frac{\mathbf{\Delta_1}}{\Delta} = 1{,}608 \text{ A}$$

$$i_2 = \frac{\mathbf{\Delta_2}}{\Delta} = 1{,}391 \text{ A}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{-9} \\ -9 & 14 \end{vmatrix} = 14 \text{ X } 14-(-9)\text{X}(-9)=115$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-9} \\ 5 & 14 \end{vmatrix} = 185 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{14} & \mathbf{10} \\ -9 & 5 \end{vmatrix} = 160$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα



Πίνακας Αντιστάσεων

$\alpha_{11} = 7$

$\alpha_{22} = 6$

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -1$

Πίνακας πηγών

$e_1 = +10 - 5 = 5$

$e_2 = -10 + 5 = -5$

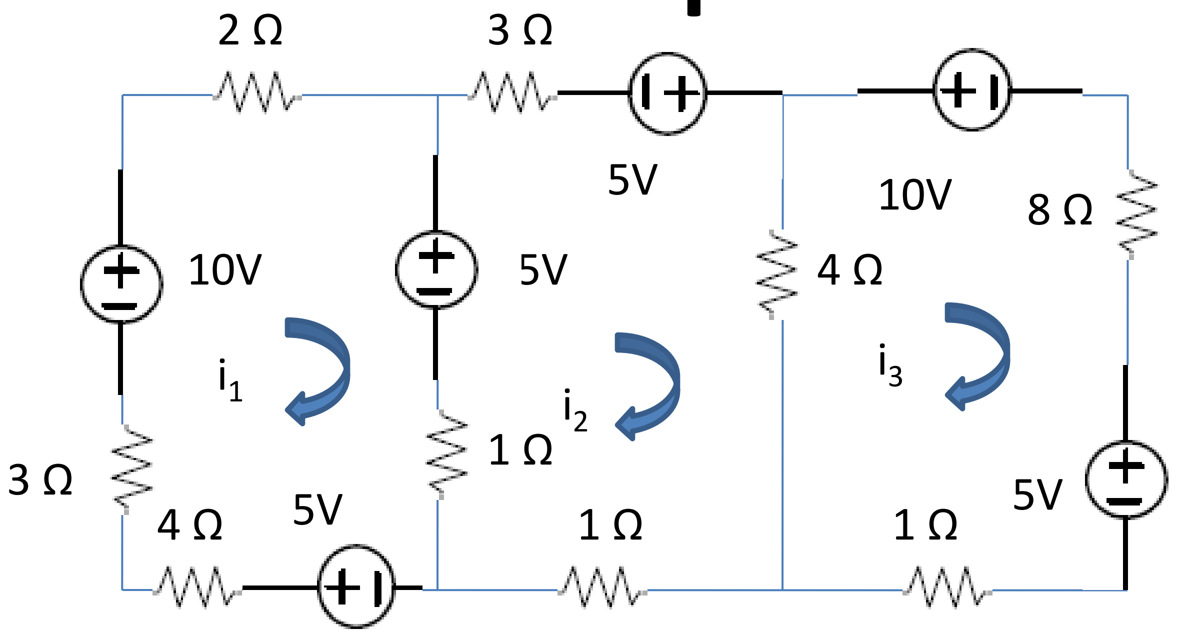
$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{-1} \\ -1 & 6 \end{vmatrix} = 41$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{-1} \\ -5 & 6 \end{vmatrix} = 25 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{7} & \mathbf{5} \\ -1 & -5 \end{vmatrix} = -30$$

$$i_1 = \frac{\mathbf{\Delta_1}}{\Delta} = 0,6A$$

$$i_2 = \frac{\mathbf{\Delta_2}}{\Delta} = -0,73\ A$$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα



Πίνακας Αντιστάσεων

$\alpha_{11} = 10$

$\alpha_{22} = 9$

$\alpha_{12} = \alpha_{21} = -1$

$\alpha_{13} = \alpha_{31} = 0$

$\alpha_{23} = \alpha_{32} = -4$

$\alpha_{33} = 13$

Πίνακας πηγών

$e_1 = +10 – 5 + 5 = 10$

$e_2 = + 5 + 5 = 10$

$e_3 = - 10 - 5 = -15$

Η μέθοδος των απλών βρόχων σε παθητικά κυκλώματα

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ -1 & 9 & -4 \\ 0 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 997$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-1} & \mathbf{10} \\ -1 & 9 & 10 \\ 0 & -4 & -15 \end{vmatrix} = -895$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ 10 & 9 & -4 \\ -15 & -4 & 13 \end{vmatrix} = 1080$$

$$i_1 = \frac{\boldsymbol{\Delta_1}}{\Delta}$$

$$i_2 = \frac{\boldsymbol{\Delta_2}}{\Delta}$$

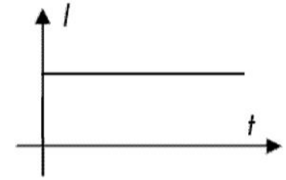
$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{10} & \mathbf{0} \\ -1 & 10 & -4 \\ 0 & -15 & 13 \end{vmatrix} = 830$$

$$i_3 = \frac{\boldsymbol{\Delta_3}}{\Delta}$$

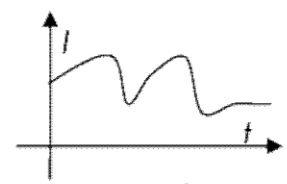
Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Συνοπτική θεωρία

Συνεχές : Ρεύμα που προέρχεται από πηγή με σταθερό δυναμικό.
Η τιμή και η φορά είναι αμετάβλητα στο χρόνο.



Μεταβαλλόμενο : Ρεύμα που η τιμή και η φορά του ή η τιμή ή η φορά του μεταβάλλονται με το χρόνο.



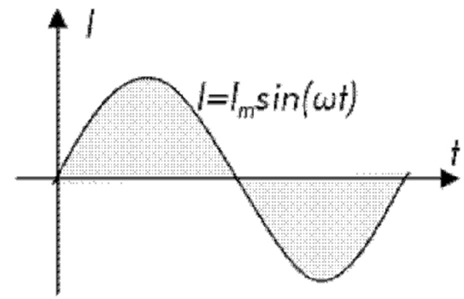
Σχήμα 1.2

Τα μεταβαλλόμενα ρεύματα – τάσεις διακρίνονται σε περιοδικά και απεριοδικά.

Περιοδικό: Το ρεύμα που οι στιγμιαίες τιμές του επαναλαμβάνονται σε ίσα και διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

Απεριοδικό: Το ρεύμα που οι στιγμιαίες τιμές του δεν επαναλαμβάνονται σε διαδοχικά χρονικά διαστήματα.

Εναλλασσόμενο Ρεύμα



Σχήμα 1.3

Εναλλασσόμενο ρεύμα : Είναι το ρεύμα που η τιμή της έντασης του μεταβάλλεται περιοδικά και ακολουθεί την ημιτονική συνάρτηση.

Περίοδος (T)

Το χρονικό διάστημα που απαιτείται για μια πλήρη εναλλαγή του ρεύματος.

Μονάδα [sec]

Συχνότητα (f)

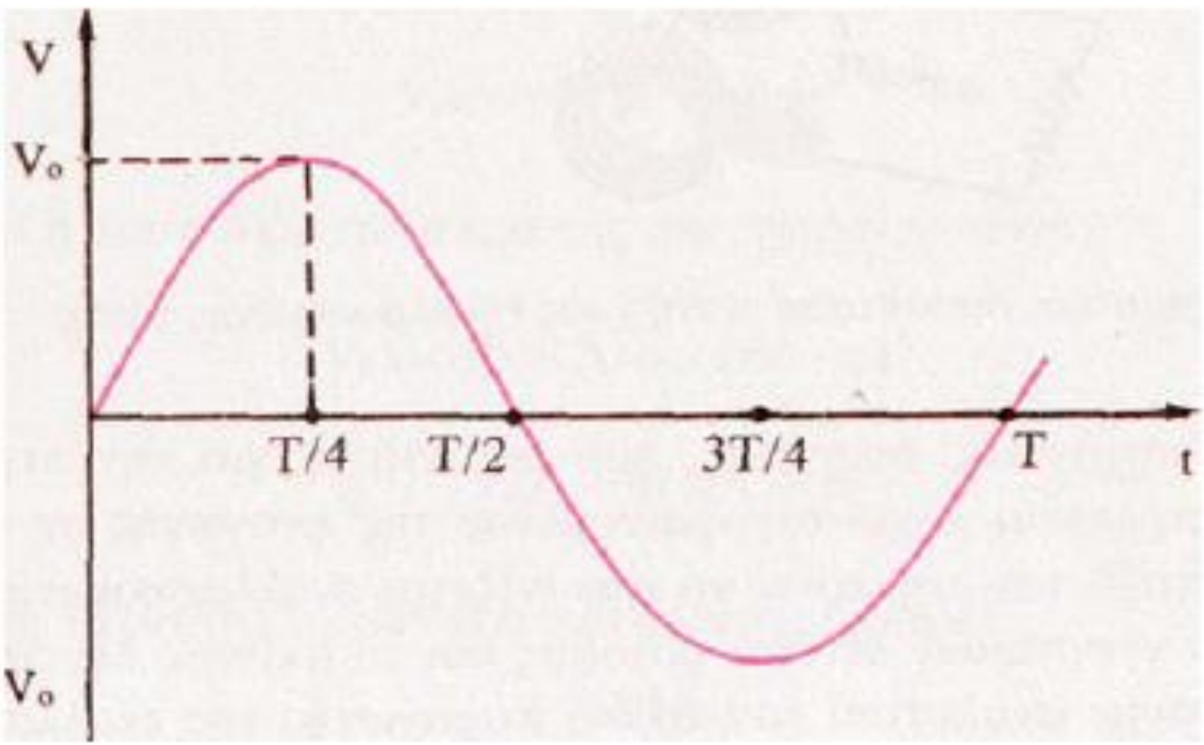
Ο αριθμός των επαναλήψεων του ρεύματος στη μονάδα του χρόνου,

Μονάδα [1/sec]=[Hz]

Ισχύει $$f=1/T \qquad (1.1)$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Η εναλλασσόμενη τάση περιγράφεται μαθηματικά από τη σχέση $V=V_o ημωt$
όπου V είναι η τάση τη χρονική στιγμή t (στιγμιαία τάση), V_o το πλάτος της, ωt η φάση και ω η κυκλική συχνότητα. Η τάση αυτή που λέγεται και ημιτονοειδής τάση εικονίζεται γραφικά στο παρακάτω σχήμα



Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Μαθηματική διατύπωση της χρονικής μεταβολής των εναλλασσομένων ρευμάτων – τάσεων

$$U = U_m \sin(\omega t + \phi) \quad (V) \qquad (1.2)$$

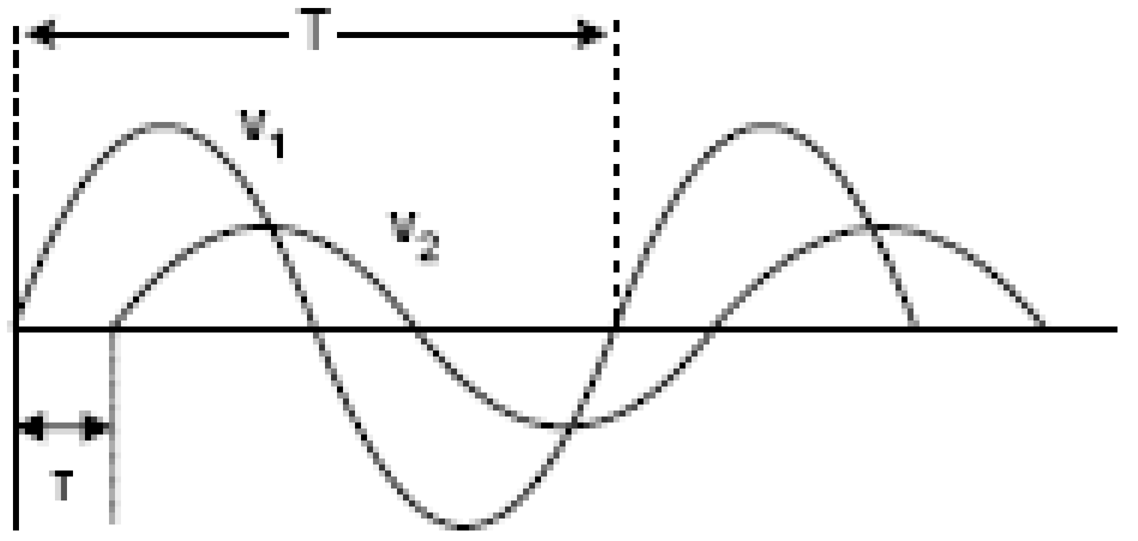
$$I = I_m \sin(\omega t + \phi) \quad (A) \qquad (1.3)$$

U_m : Μέγιστη τιμή τάσης [V]
I_m : Μέγιστη τιμή ρεύματος [A]
$\omega=2\pi f$: κυκλική συχνότητα [rad/sec]

ωt : γωνία φάσης [° ή rad]
φ : αρχική γωνία φάσης [° ή rad]

Οι εναλλασσόμενες τάσεις και ρεύματα μπορούν να αναπαρασταθούν από στρεφόμενα διανύσματα με γωνιακή ταχύτητα περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4.Τ α μέτρα των περιστρεφόμενων διανυσμάτων ισούνται με την μέγιστη τιμή της τάσης ή του ρεύματος.

Εναλλασσόμενο Ρεύμα



Στην ημιτονοειδή κατάσταση ισορροπίας, η χρονική μετατόπιση ανάγεται σε γωνία και λέγεται διαφορά φάσης των δύο σημάτων. Αν τ είναι η χρονική μετατόπιση, η διαφορά φάσης δίνεται από τη σχέση

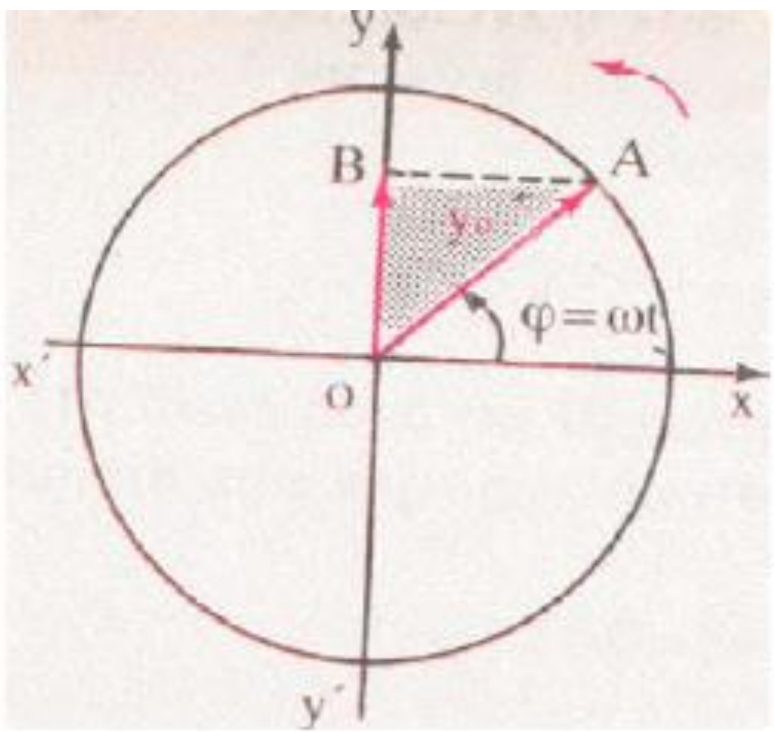
$$\phi = \omega\tau = 2\pi\tau/T$$

Θετικές γωνίες φάσης δηλώνουν προήγηση (leading) ενώ για αρνητικές γωνίες η φάση υστερεί (lagging)

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Παράσταση ημιτονοειδούς μεγέθους με περιστρεφόμενο διάνυσμα

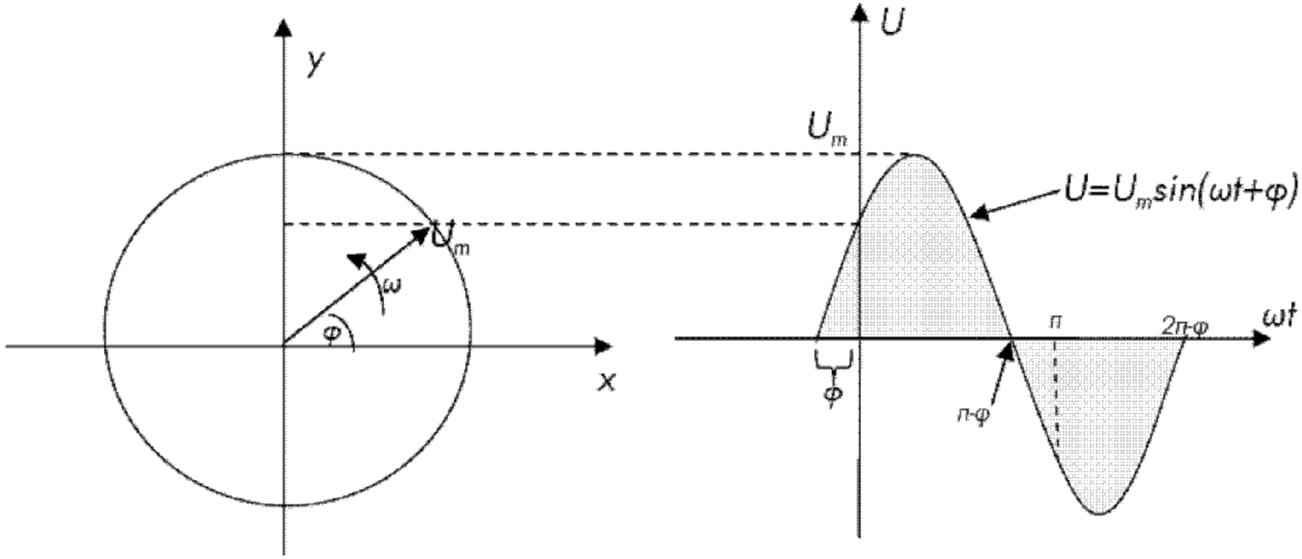
Ας θεωρήσουμε ένα διάνυσμα ΟΑ μέτρου y_o, που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ω περί την αρχή του Ο κατά τη θετική φορά. Υποθέτουμε ότι τη χρονική στιγμή t = 0 το διάνυσμα ΟΑ βρίσκεται πάνω στον άξονα xx', ενώ μετά από χρόνο t έχει διαγράφει γωνία φ = ωt. Η προβολή του διανύσματος ΟΑ πάνω στον άξονα yy' είναι



ΟΒ = ΟΑ ημωt

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Την χρονική στιγμή t=0 το περιστρεφόμενο διάνυσμα σχηματίζει γωνία με τον οριζόντιο άξονα ίση με την αρχική γωνία φάσης.



Σχήμα 1.4 Μεταφορά στρεφόμενου διανύσματος στο πεδίο του χρόνου

Όπως φαίνεται στο σχήμα 1.4 η στιγμιαία τιμή της τάσης ισούται με την προβολή του αντίστοιχου στρεφόμενου διανύσματος στον κάθετο άξονα.

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Ενεργός τιμή εναλλασσομένου ρεύματος, τάσης

Ενεργός τιμή εναλλασσομένου ρεύματος είναι η ισοδύναμη τιμή ενός ρεύματος που προκαλεί την ίδια κατανάλωση ισχύος πάνω στην ίδια αντίσταση

Ισχύει:

$$\boxed{I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

Κατ' αναλογία ισχύει για την τάση,

$$\boxed{U_{rms} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα των ρευμάτων με συχνότητα **a)**16 2/3 Hz, **b)** 25 Hz, **c)** 48 Hz, **d)** 50 Hz, **e)** 51.4 Hz, **f)** 100 Hz, **g)** 1000 Hz, **h)** 3kHz, **i)** 295.4 kHz.

Για την κυκλική συχνότητα ισχύει **$\omega=2\pi f$** (rad/sec)

a) $\omega=2\cdot\pi\cdot 16.66$ rad/sec= 104,72 rad/sec

b) $\omega=2\cdot\pi\cdot 25$ rad/sec= 157,07 rad/sec

b) $\omega=2\cdot\pi\cdot 48$ rad/sec= 301,59 rad/sec

d) $\omega=2\cdot\pi\cdot 50$ rad/sec= 314 rad/sec

e) $\omega=2\cdot\pi\cdot 51.4$ rad/sec = 322,95 rad/sec

f) $\omega=2\cdot\pi\cdot 100$ rad/sec= 628,32 rad/sec

g) $\omega=2\cdot\pi\cdot 1000$ rad/sec = 6.283,20 rad/sec

h) $\omega=2\cdot\pi\cdot 3000$ rad/sec= 18.849,60 rad/sec

i) $\omega=2\cdot\pi\cdot 295.400$ rad/sec= $1{,}856\cdot 10^6$ rad/sec

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Να υπολογιστεί η κυκλική συχνότητα των ρευμάτων με συχνότητα **a)**16 2/3 Hz, **b)** 25 Hz, **c)** 48 Hz, **d)** 50 Hz, **e)** 51.4 Hz, **f)** 100 Hz, **g)** 1000 Hz, **h)** 3kHz, **i)** 295.4 kHz.

Να υπολογιστεί η περιοδος των παραπάνω ρευμάτων

Για την περίοδο ισχύει **T=1/f** (sec)

a) T=1/16.66 sec = 0,06 sec b) T=1/25 sec = 0,04 sec c) T=1/48 sec = 0,0208 sec

d) T=1/50 sec = 0,02 sec e) T=1/51.4 sec = 0,0194 sec f) T=1/100 sec = 0,01 sec

g) T=1/1000 sec = 0,001 sec h) T=1/3000 sec = $3{,}33 \cdot 10^{-4}$ sec

i) T=1/295.400 sec = $3{,}38 \cdot 10^{-6}$ sec

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Να υπολογιστεί η στιγμιαία τιμή της τάσης με πλάτος um=65V, f=50 Hz μετά τη διέλευση της από το μηδέν για τους εξής χρόνους

a) 0.3 sec b) 0.03 sec c) 0.003sec d)1.55 sec e)1.963 sec f) 2.074 sec

U=Um·sin(ωt) => U=65·sin(2π 50 t) => **U=65·sin(100·π·t)** (V)

a) U=65·sin(100·π·0,3)=0V b) U=65· sin(100·π·0,03)= 0V c) U=65· sin(100·π·0,003)=52,6V

d) U=65·sin(100·π·1,55) V = 0 V e) U=65·sin(100·π·1,963) V = 52,6 V

f) U=65·sin(100·π·2,074) V = 61,8 V

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

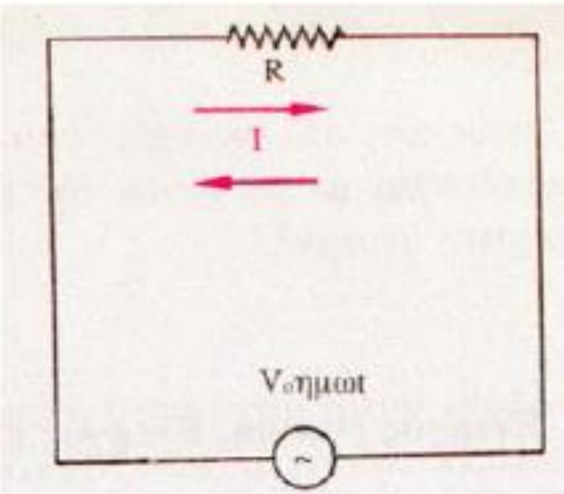
Εμπέδηση

Σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος η δυσκολία στην κίνηση των ηλεκτρονίων οφείλεται στις συγκρούσεις τους με τα ιόντα του μεταλλικού πλέγματος του αντιστάτη, στην αυτεπαγωγή όταν υπάρχει πηνίο ή στην ύπαρξη πυκνωτή. Για να ποσοτικοποιήσουμε την δυσκολία που συναντούν τα ηλεκτρόνια σε ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με αντίσταση, πηνίο, πυκνωτή ή συνδυασμούς τους, ορίζουμε ένα καινούργιο φυσικό μέγεθος που λέγεται **εμπέδηση Z και ορίζεται ως:**

Z = Vεν / Iεν ή Z = Vo / Io και εκφράζεται σε Ohm

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με ωμική αντίσταση



Η ένταση του ρεύματος κάθε χρονική στιγμή δίνεται από το νόμο του Ohm

$$I=\frac{V}{R}$$

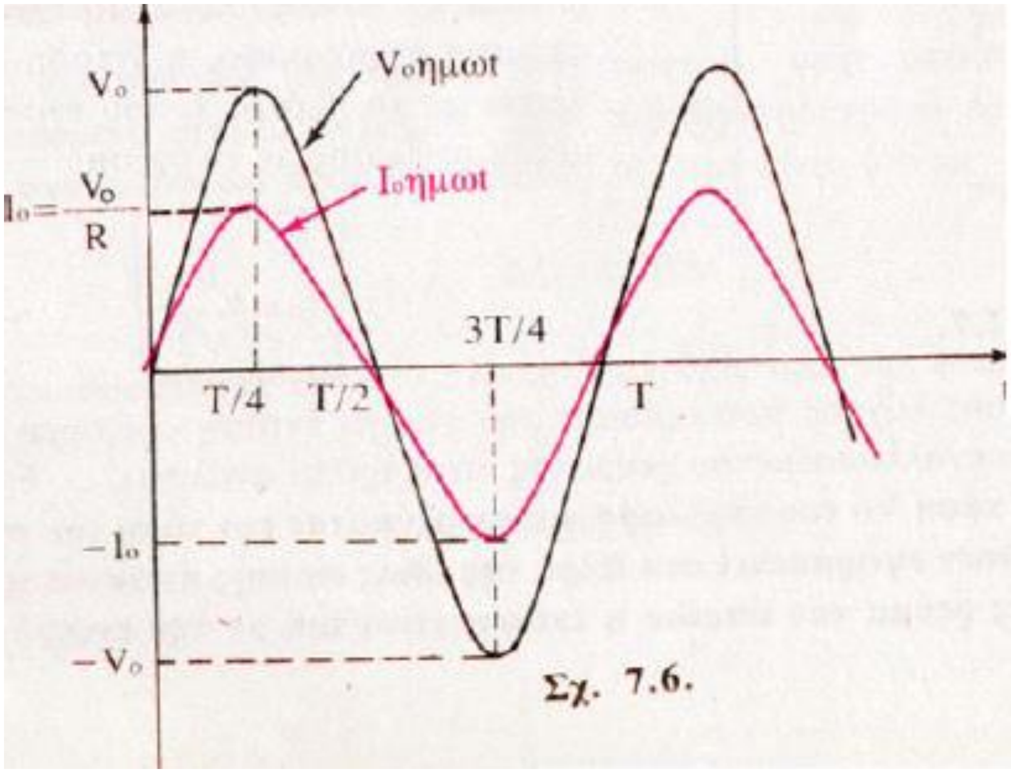
$$I=\frac{V_0\,\eta\mu\omega t}{R}=\frac{V_0}{R}\eta\mu\omega t$$

=>

$$I=I_0\,\eta\mu\omega t$$

$$I_0=\frac{V_0}{R},$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

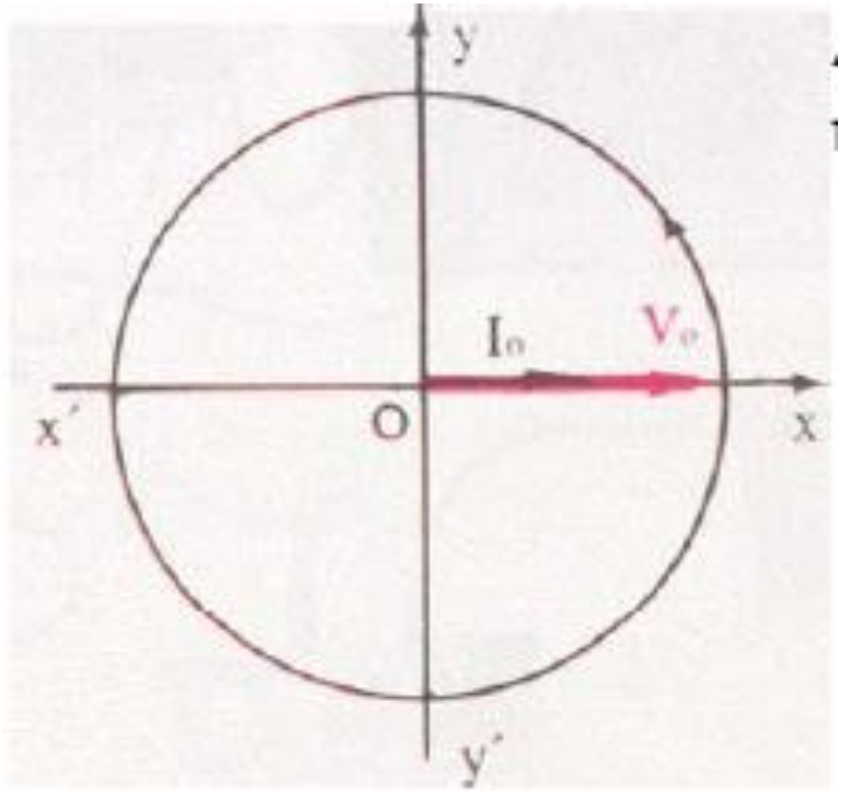


Συγκρίνοντας τη παραπάνω σχέση με τη σχέση που περιγράφει την εναλλασσόμενη τάση που εφαρμόζεται στο κύκλωμα, μπορούμε να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι:

α) Το ρεύμα και η τάση έχουν την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

β) Είναι μεγέθη συμφασικά, δηλαδή παίρνουν ταυτόχρονα μέγιστη θετική ή μέγιστη αρνητική τιμή.

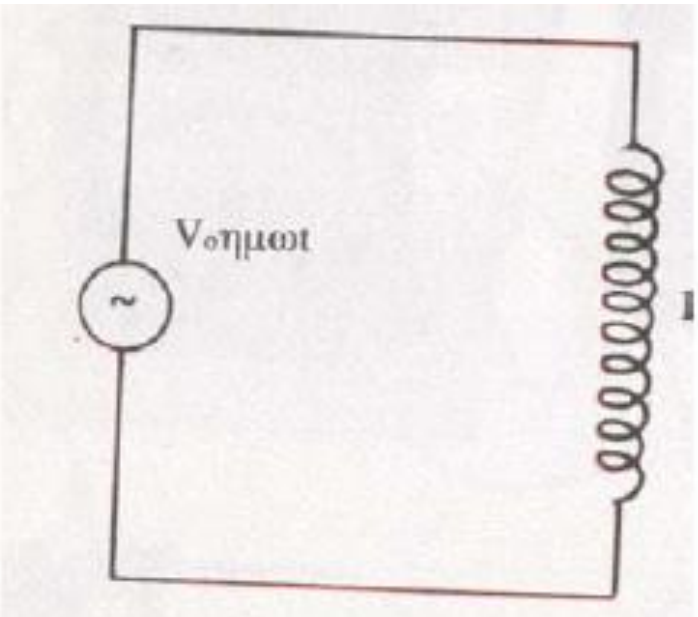
Εναλλασσόμενο Ρεύμα



Z = R

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο



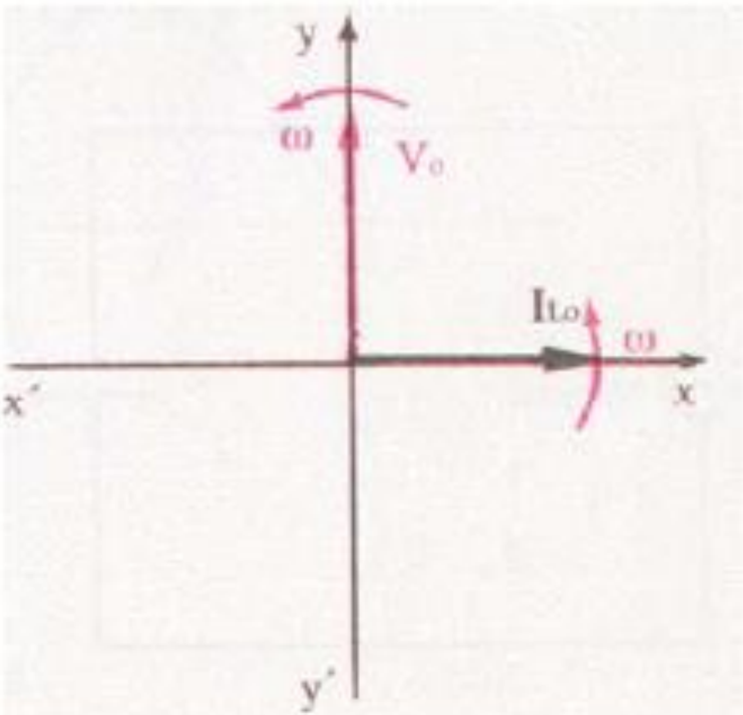
Στα άκρα ενός πηνίου εφαρμόζεται εναλλασσόμενη τάση V=Voημωt Για να μελετήσουμε τη συμπεριφορά του στο εναλλασσόμενο ρεύμα, θα θεωρήσουμε ότι η ωμική του αντίσταση είναι αμελητέα (ιδανικό πηνίο=> R =0)

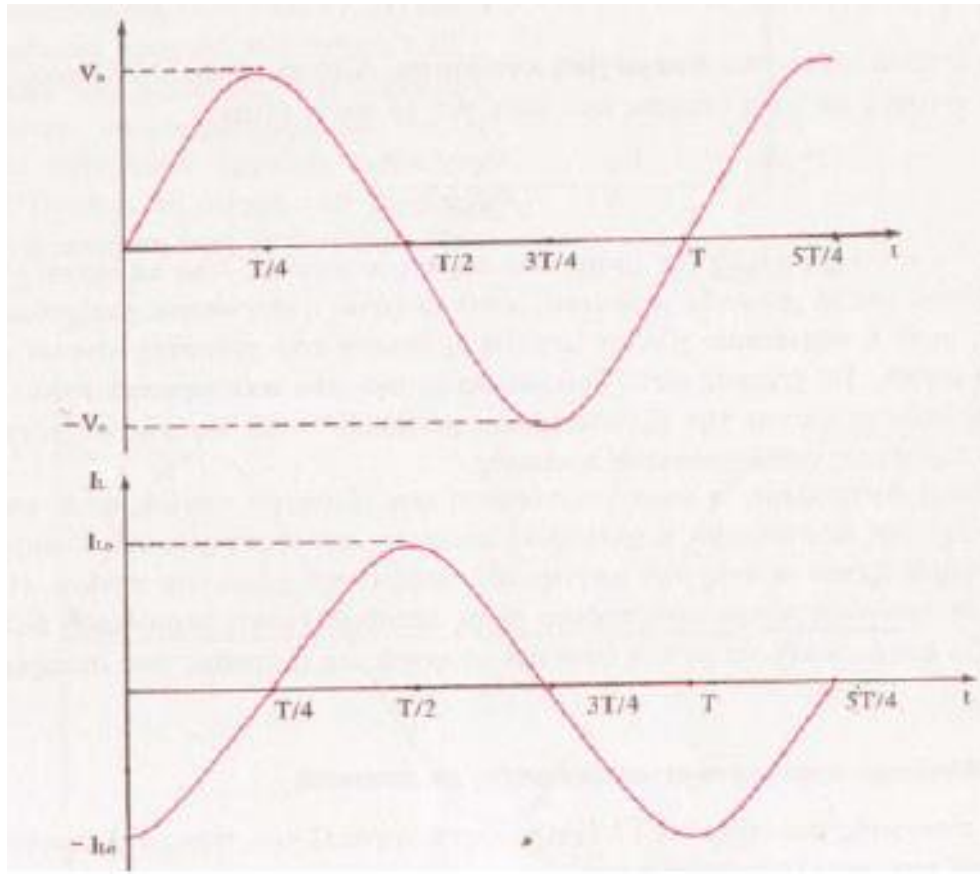
Το πηνίο διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα που, όπως μπορεί να αποδειχθεί, η ένταση μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο, έχει με την τάση την ίδια κυκλική συχνότητα ω και η φάση της υστερεί της φάσης της τάσης κατά π/2. Η σχέση που την περιγράφει είναι:

$$I_L = I_{Lo}\eta\mu(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο





Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πηνίο

Αποδεικνύεται ότι η εμπέδηση ενός κυκλώματος που περιέχει ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L είναι

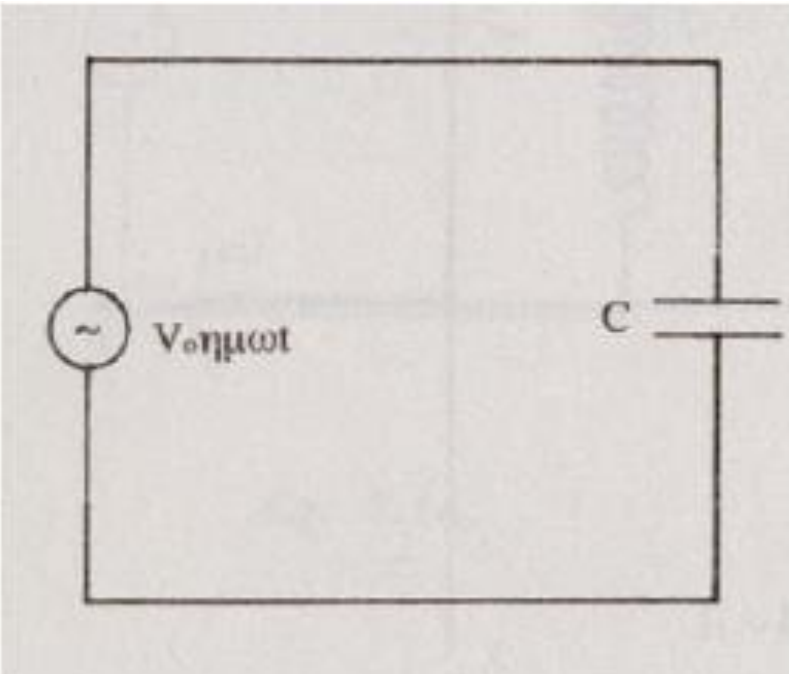
$$Z_L = L\omega \qquad Z_L = \frac{V_o}{I_{Lo}}$$

Η Z_L λέγεται επίσης και επαγωγική αντίσταση. Η ενεργός τιμή της έντασης που διαρρέει το πηνίο είναι:

$$I_{\varepsilon\nu} = \frac{I_{Lo}}{\sqrt{2}} = \frac{V_o}{\sqrt{2}L\omega} = \frac{V_{\varepsilon\nu}}{L\omega}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή

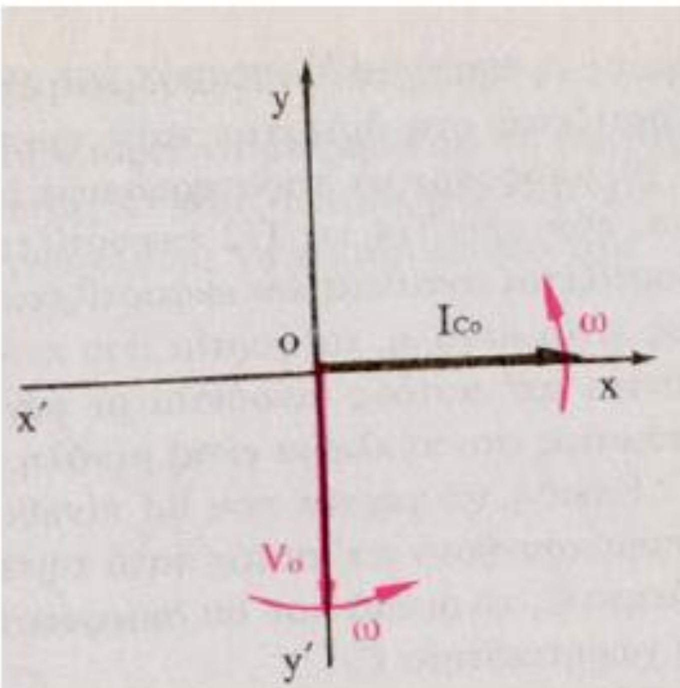


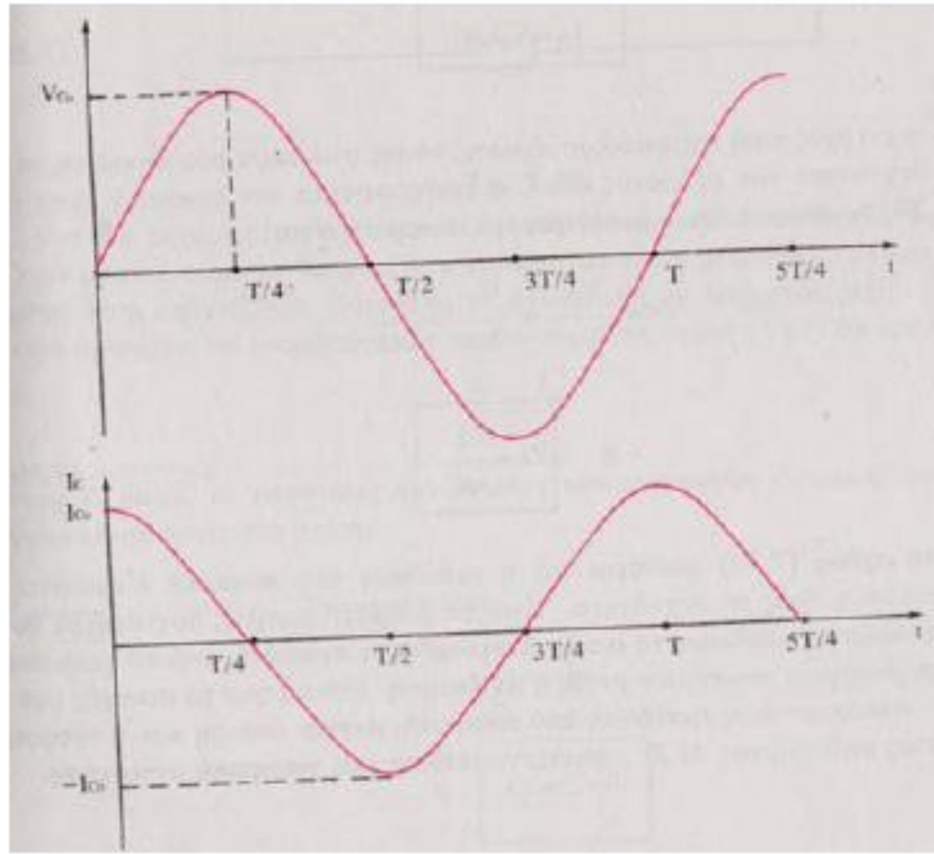
$V=V_o$ημωt
Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ένταση Ic του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου της ίδιας κυκλικής συχνότητας με τη συχνότητα της τάσης και η φάση της προηγείται της τάσης κατά π/2. Δηλαδή ισχύει:

$$I_c=I_{co}\etaμ(\omega t+\pi/2)$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή





Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος με πυκνωτή

Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ενεργός τιμή της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα του πυκνωτή είναι:

$$I_{εν}=V_{εν}ωC$$

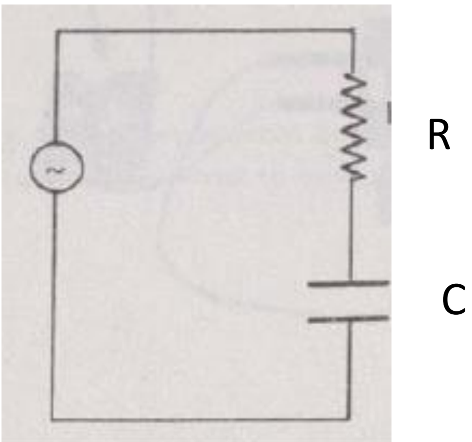
όπου Vεν η ενεργός τιμή της εναλλασσόμενης τάσης στα άκρα του πυκνωτή, ω η κυκλική συχνότητα του ρεύματος και C η χωρητικότητα του πυκνωτή. Συνεπώς η εμπέδηση του πυκνωτή, **Zc, είναι:**

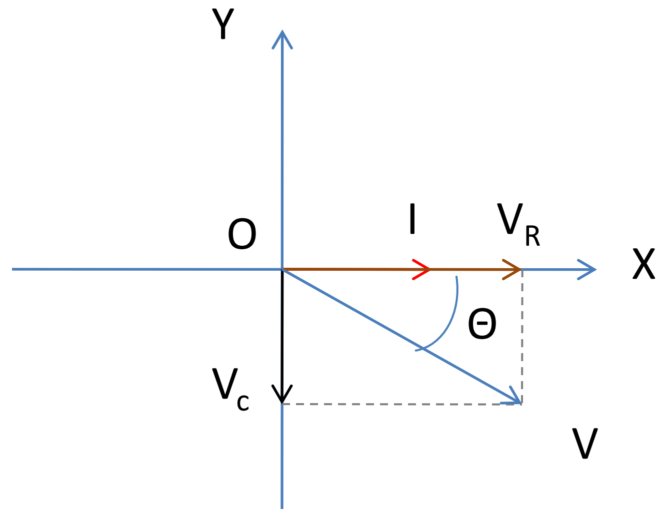
$$Zc=\frac{V_{εν}}{I_{εν}}=\frac{V_o}{I_{Co}}=\frac{1}{ωC}$$

$$Zc=\frac{1}{ωC}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα αντίσταση και πυκνωτή σε σειρά



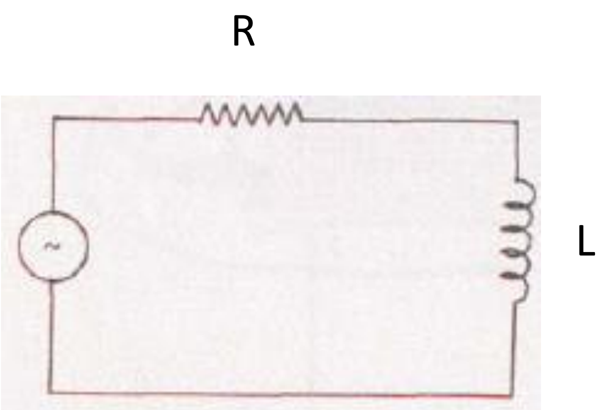


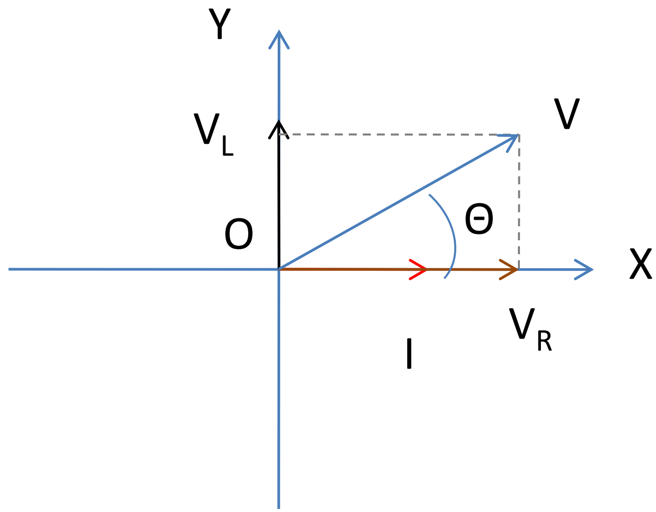
$$V^2 = V_R^2 + V_c^2 \Rightarrow V = \sqrt{V_R^2 + V_c^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\mathbf{V_R}}{V_c} \Rightarrow \qquad \varepsilon\varphi\theta = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Κύκλωμα αντίσταση και πηνίο σε σειρά



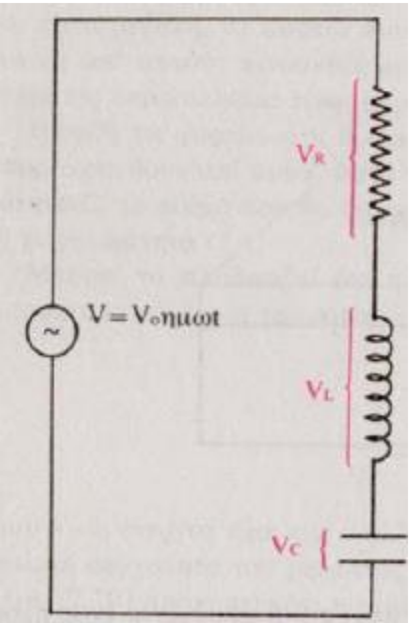


$$V^2 = V_R^2 + V_L^2 \Rightarrow V = \sqrt{V_R^2 + V_L^2} \Rightarrow Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\mathbf{V_L}}{V_R} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \frac{\omega L}{R}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

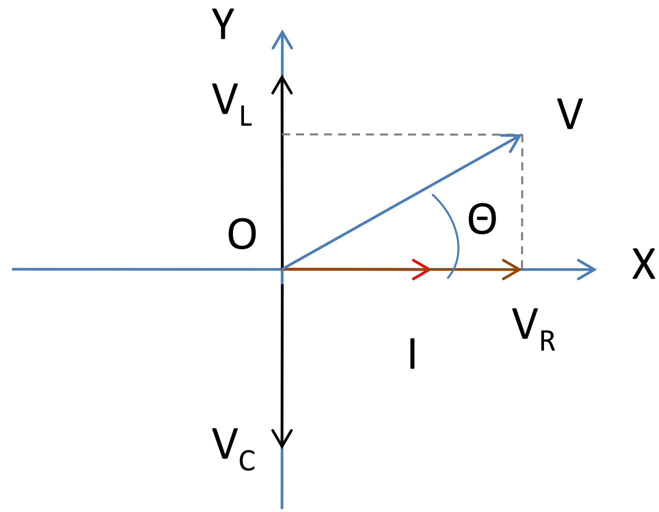
Κύκλωμα αντίσταση πηνίο και πυκνωτή σε σειρά



R

L

C



$$V_o=\sqrt{V_{Ro}^2+(V_{Lo}-V_{Co})^2}$$

$$V_{Ro}=I_oR,\ \ V_{Lo}=I_o\omega L,\ \ V_{Co}=I_o\frac{1}{\omega C}$$

$$V_o=I_o\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\frac{V_o}{I_o}=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$Z=\sqrt{R^2+(\omega L-\frac{1}{\omega C})^2}$$

$$\varepsilon\varphi\theta=\frac{L\omega-\frac{1}{\omega C}}{R}$$

Εναλλασσόμενο Ρεύμα

Συντονισμός σε σειρά

Για μία ορισμένη τιμή του ω_o θα ισχύει $\omega_o L = \dfrac{1}{\omega_o C}$

Τότε Z = R η διαφορά φάσης ανάμεσα σε τάση και ρεύμα είναι 0 οπότε η εμπέδηση ισούται με την αντίσταση, το πλάτος της έντασης του ρεύματος γίνεται μέγιστο και η τάση συμφασική με το ρεύμα. Η κατάσταση αυτή του κυκλώματος λέγεται συντονισμός.

Λύνοντας ως προς ω_o την παραπάνω σχέση προκύπτει

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$