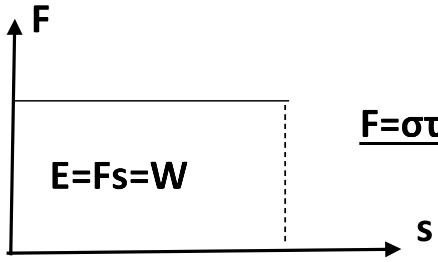
ΕΡΓΟ – ΕΝΕΡΓΕΙΑ – ΙΣΧΥΣ

Έργο W μιας σταθερής δύναμης F που μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της κατά διάστημα s και σχηματίζει γωνία φ με την μετατόπιση :

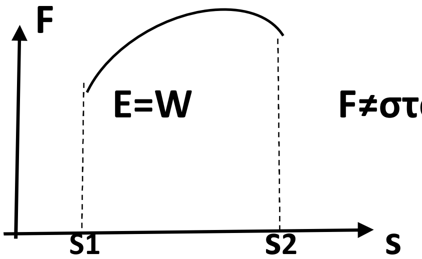
$$W = F\,S\,συνφ$$

Είναι μέγεθος μονόμετρο και το μετράμε σε joule.
Στο SI: 1 J = 1N * 1m

Αν φ=0° => συνφ =1, τότε η δύναμη παράγει έργο W=F s
Αν 0°<φ<90° => συνφ >0 , τότε W > 0 και η δύναμη παράγει έργο
Αν φ=90° => συνφ=0, τότε W=0
Αν 90°<φ<180° => συνφ<0, τότε W<0 και η δύναμη καταναλίσκει έργο
Αν φ=180° => συνφ=-1 , τότε η δύναμη καταναλίσκει έργο W=-Fs



F=σταθ



F≠σταθ $W=\int_{S1}^{S2} F\,ds$

Από το διάγραμμα F-s υπολογίζω έργο
Ε(εμβαδόν)=W

Τύποι ολοκληρωμάτων

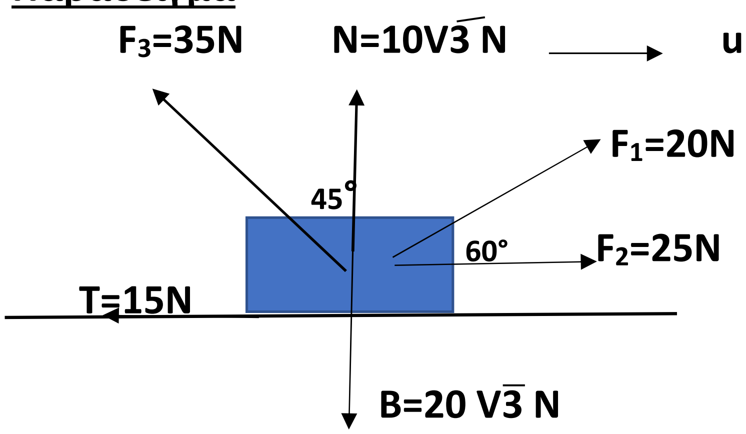
$\int x^n\, dx = x^{n+1}/n+1 +c$ αόριστο ολοκλήρωμα

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ ορισμένο ολοκλήρωμα

$\int_1^2 x^3dx = (x^4/4+ c)\Big|_1^2 = (2^4/4 \ +c) \ -(1^4/4 \ +c)= 16 - 1/4 =$

$= 63/4$

Παράδειγμα



Αν το σώμα μετακινήθηκε s=3m προς τα δεξιά:

$W= F\, S$ συνφ

$W_N=W_B=0$ γιατί είναι κάθετες στην μετατόπιση

(φ=90° ή 270° άρα συνφ=0)

$W_{F1}=F_1 * s*$ συν 60°= 20*3* 1/2 = 30J

$W_{F2}= F_2*s *$συν0° = 25*3*1=75J

$W_{F3} = F_3 *S*$ συν135°=35*3*($-\sqrt{2}/2$)= $- 52{,}5\sqrt{2}$ J=-74,2J

$W_T= T*s*$συν180°= 15*3* (-1)=-45J   ($W_T=-T*S$)

$W_{ολ}$ = 30+75- 74,2 - 45 =-14,2 J

Ενέργεια Ε : **Λέμε ότι ένα σώμα έχει ενέργεια όταν μπορεί να παράγει έργο.**

Είναι μονόμετρο μέγεθος και έχει τις ίδιες μονάδες με το έργο (στο SI : joule)

$\Delta E = W$ **η μεταβολή της ενέργειας ενός σώματος ισούται με το έργο που παράγει ή καταναλώνει η ολική δύναμη που ασκείται στο σώμα.**

Η ενέργεια έχει πολλές μορφές : μηχανική, ηλιακή, χημική, πυρηνική, θερμική κ.ά

$E_{ολ}$=σταθερή: **Η ενέργεια δεν δημιουργείται ,ούτε καταστρέφεται. Αλλάζει μορφή.**

$E_{μηχ} = K + U$: **Η μηχανική ενέργεια είναι άθροισμα της κινητικής και της δυναμικής**

Κινητική ενέργεια έχει ένα σώμα όταν κινείται

$$K = 1/2\ m u^2$$

Δυναμική ενέργεια έχει ένα σώμα λόγω θέσης ή κατάστασης

Λόγω θέσης : $U = mgh$ (πεδίο βαρύτητας)

Λόγω κατάστασης : $U = ½\ kx^2$ (ελατήριο)

ΑΔΜΕ (Αρχή διατήρησης της μηχανικής ενέργειας)

Σε ένα σύστημα που ασκούνται μόνο συντηρητικές δυνάμεις, η μηχανική ενέργεια διατηρείται

Η κινητική και η δυναμική μπορούν να αλλάζουν, αλλά το άθροισμα τους μένει σταθερό.

$$K_1 + U_1 = K_2 + U_2$$

Αν ασκούνται μη συντηρητικές δυνάμεις , το έργο τους ισούται με τη μεταβολή της μηχανικής ενέργειας

$$\Delta E_{\mu\eta\chi} = W_{\mu\eta\ \sigma\upsilon\nu\tau\eta\rho\eta\tau\iota\kappa\acute{\omega}\nu}$$

- **Συντηρητικές λέγονται οι δυνάμεις που το έργο τους δεν εξαρτάται από τη διαδρομή (π.χ το βάρος) και μη συντηρητικές αυτές που το έργο τους εξαρτάται από τη διαδρομή (π.χ η τριβή)**

<u>Παράδειγμα:</u>

Ένα σώμα μάζας m=5kg πέφτει από τα 200m. Υπολογίστε την κινητική του και δυναμική του ενέργεια στα 200m, στα 75 m και στο έδαφος. ($g=10m/s^2$)

1 g $K_1=0$, $U_1=mgh=5*10*200=10000J$, $E_{\mu\eta\chi}=10000J$

ΑΔΜΕ $h=200 - h_2 = 200-75=125\ m$

$h=1/2\ gt^2 \Rightarrow t=\sqrt{2*h/g}=5s$, $u=gt=10*5=50m/s$

$K_2=1/2\ mu^2=1/2*5*50^2 = 6250J$

2 $U_2=E_{\mu\eta\chi}-K_2=10000-6250=3750J$ *

3//////////////////// $U_3=0$, $K_3=E_{\mu\eta\chi} = 10000J$

* ή $U_2 = mgh_2=5*10*75=3750J$ $E_{\mu\eta\chi}=10000J$

$K_2=E_{\mu\eta\chi}-U_2= 10000-3750=6250\ J$

Προσοχή: **Το h στην ελεύθερη πτώση ($h=1/2\ gt^2$) είναι η απόσταση που διένυσε το κινητό από το σημείο εκκίνησης, ενώ στη δυναμική ενέργεια (U = mgh) είναι η απόσταση από το έδαφος . (ασκ 13 σελ 96)**

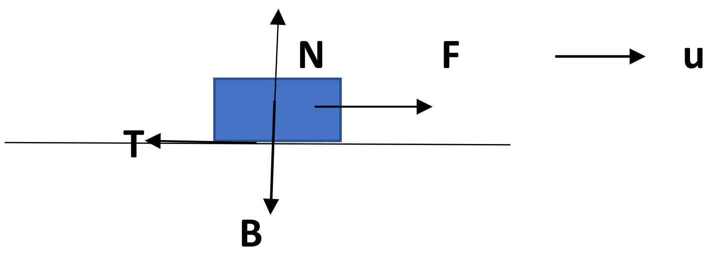
ΘΜΚΕ (Θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας)

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας ενός σώματος ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα των έργων των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται πάνω του κατά την κίνησή του

$$\Delta K = W_{ολ}$$

Ασκήσεις:

1. Σώμα μάζας m=10kg ηρεμεί σε οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ=0,1 . Με την επίδραση σταθερής οριζόντιας δύναμης F=20N , αρχίζει να κινείται. Ποια είναι η ταχύτητά του αφού διανύσει 7m; ($g=10m/s^2$)



W=Fsσυνφ

N=B=mg=10*10=100N

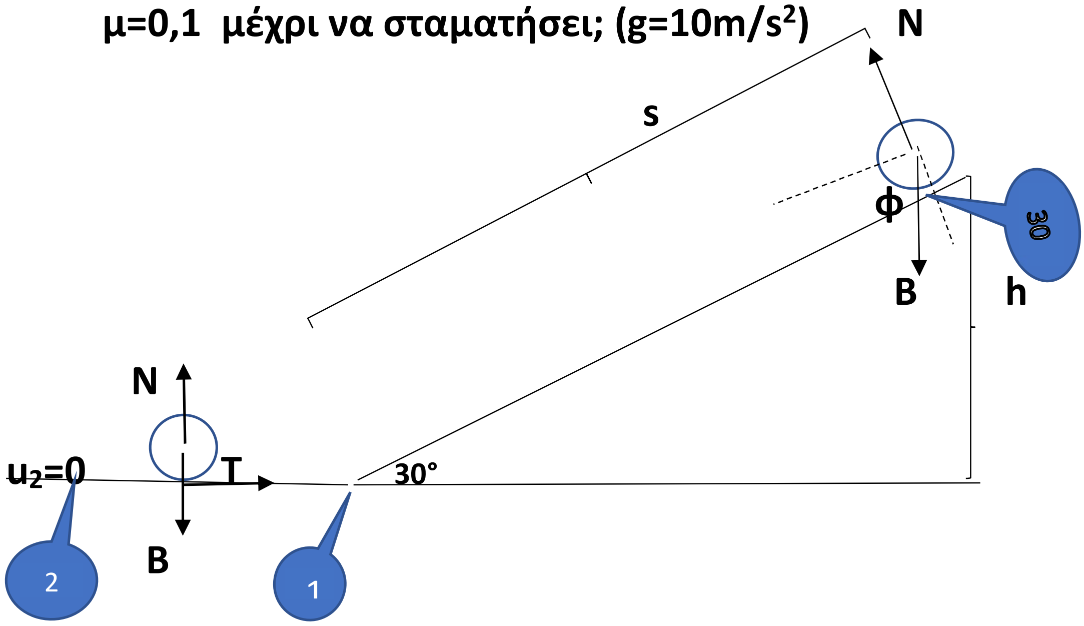
T=μN=0,1*100=10N

ΘΜΚΕ: $\Delta K=W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ}-K_{αρχ} = W_B+W_N+W_F+W_T \Rightarrow$

$K_{τελ} - 0 = 0+0+F*s-T*s \Rightarrow 1/2\ mu^2= F*s-T*s \Rightarrow$

$1/2 *10*u^2 = 20*7 - 10*7 \Rightarrow 5\ u^2 = 140-70 \Rightarrow u =\sqrt{14}$ m/s

2. Σώμα μάζας m=10 kg αφήνεται να κατέβει σε λείο κεκλιμένο επίπεδο κλίσης 30° και ύψους 5m : α) Με ποια ταχύτητα θα φτάσει στη βάση; β)Πόσα μέτρα θα διανύσει στο οριζόντιο επίπεδο με συντελεστή τριβής μ=0,1 μέχρι να σταματήσει; ($g=10m/s^2$)



Γωνίες με πλευρές κάθετες μία προς μία

ημ30°=h/s =>h=s*ημ30°=> s=h /ημ30° =5/ (1/2) =10 m

B=mg= 10*10 = 100N

α) φ=90°-30°=60°

ΘΜΚΕ: $\Delta K=W_{ολ}$ =>$K_{τελ}$-$K_{αρχ}$ = W_N+W_B=>

$K_{τελ}$ – 0 =0+B*s*συνφ =>1/2 m$u_1{}^2$= B*s* συν60° =>

1/2 *10* $u_1{}^2$ = 100* 10* 1/2 => u_1 = 10 m/s

β) T=μN=μB=μmg=0,1*10*10=10N

ΘΜΚΕ(1->2): $\Delta K=W_{ολ}$ =>

$K_{τελ}$-$K_{αρχ}$ = K_2 – K_1= $W_N+W_B+W_T$ => 0-1/2 m$u_1{}^2$=0+0-Ts =>

1/2 m$u_1{}^2$=Ts => s =(1/2 m$u_1{}^2$)/T => s= (1/2 *10* 100)/10=> s=50m

3. Σώμα μάζας m=2kg κινείται σε λείο οριζόντιο επίπεδο με ταχύτητα u_o=4m/s . Κάποια στιγμή ασκείται πάνω του σταθερή δύναμη F=7N , που σχηματίζει γωνία 120° με τη μετατόπιση. Αν g=$10m/s^2$, να υπολογίσετε:

α) την ταχύτητα του μετά από μετατόπιση 2m

β) πότε θα σταματήσει;

(συν60°=1/2, συν120°=-1/2)

(απάντηση: α) u=3m/s β) t=2,285s)

ΙΣΧΥΣ - ΑΠΟΔΟΣΗ ΜΗΧΑΝΗΣ

Ισχύ P ονομάζουμε το ρυθμό παραγωγής ή κατανάλωσης έργου.

$$P = W / t$$

Είναι μονόμετρο μέγεθος και η μονάδα του στο SI είναι το Watt (W). 1Watt = 1 joule/ 1 sec

Για σταθερή δύναμη F, παράλληλη στη μετατόπιση, που ασκείται σε ένα σώμα που εκτελεί ευθ. ομαλή κίνηση και παράγει έργο W προκύπτει:

P = W/t = F*s/t=> P= F*u

(μπορεί να ασκούνται και άλλες δυνάμεις αλλά $F_{ολ}$=0)

Αν η u≠σταθ ($F_{ολ}$≠0) μπορούμε να ορίσουμε την μέση ισχύ

$P_μ = F * u_μ$ όπου $u_μ$ η μέση ταχύτητα ή

τη στιγμιαία τιμή της $P_i = F*u_i$ όπου u_i η ταχύτητα τη χρονική στιγμή t_i .

Άλλες μονάδες:

1 kW = 1000 W

1 HP (αγγλικός ίππος) =746 W

1 CV (γαλλικός ίππος) = 736 W

Με τη βοήθεια του Watt ορίζουμε και δύο μονάδες ενέργειας:

W=P*t

1 Wh = 1W * 1h= 1W * 3600s = 3600 J

1 kWh= 1000 Wh = 3.600.000 J

Μία μηχανή που απορροφά ενέργεια οποιασδήποτε μορφής και παράγει μηχανικό έργο (π.χ πετρελαιομηχανή, βενζινοκινητήρας) λέγεται κινητήρια μηχανή ή κινητήρας

Κριτήριο για την απόδοσή της αποτελεί ο συντελεστής απόδοσης α:

$$\alpha = \frac{E \text{ παραγόμενη σε χρόνο } t}{E \text{ δαπανώμενη σε χρόνο } t} = \frac{P \text{ ωφέλιμη}}{P \text{ δαπανώμενη}}$$

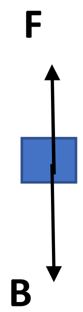
Το α είναι καθαρός αριθμός μεταξύ του 0 και του 1 ($0 \leq \alpha \leq 1$) και συνήθως εκφράζεται σαν ποσοστό (%), δηλαδή αν α=0,8 λέμε ότι η μηχανή έχει απόδοση 80%.

<u>Παράδειγμα :</u>

Ένα ανυψωτικό μηχάνημα έχει συντελεστή απόδοσης 80%. Με ποια ταχύτητα θα ανυψώσει ένα σώμα μάζας 20 Kg , όταν η προσφερόμενη ισχύς είναι 10KW; Πόσο έργο θα παράγει , αν λειτουργήσει για 2 h ; $g=10 m/s^2$

(δαπανώμενη=προσφερόμενη)

$\alpha = P_{\omega\phi}/P_{\delta\alpha\pi} \Rightarrow P_{\omega\phi} = \alpha * P_{\delta\alpha\pi} = 0{,}8 * 10 = 8kW = 8000W$



$u = \sigma\tau\alpha\theta \Rightarrow F = B = mg = 20*10 = 200N$

$P_{\omega\phi} = Fu \Rightarrow u = P\omega\phi/F = 8000/200 = 40m/s$

$P_{\omega\phi} = W/t \Rightarrow W = P_{\omega\phi}\ t = 8\ kW * 2h = 16kWh$

(σελ 96: ασκ 14,16, 18)

ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ

- Θεωρούμε στερεό σώμα που αποτελείται από πολλά υλικά σημεία. Αν m_i η μάζα του κάθε υλικού σημείου και r_i το διάνυσμα θέσης του, το διάνυσμα θέσης του κέντρου μάζας (κ.μ) του στερεού είναι: $r = \Sigma\, m_i\, r_i / m$, όπου $m = m_1 + m_2 + \ldots + m_\nu$

- Ένα υλικό σημείο, αν Fολ≠0 --→ μεταφέρεται σε ευθύγραμμη ή καμπυλόγραμμη τροχιά

- Ένα στερεό μπορεί να μεταφέρεται ή να περιστρέφεται ή να τα κάνει και τα δύο ταυτόχρονα (σύνθετη κίνηση = κύλιση)

    - Στην **μεταφορική κίνηση** όλα τα υλικά σημεία έχουν την ίδια ταχύτητα $\bar{u}$ και οι τροχιές τους είναι παράλληλες μεταξύ τους και με αυτή του κ.μ

    - Στην **περιστροφική ή στροφική κίνηση** όλα τα σημεία του σώματος περιστρέφονται γύρω από μία ευθεία. Αυτή η ευθεία ονομάζεται άξονας περιστροφής. Τα σημεία του σώματος εκτελούν κυκλική κίνηση με κέντρο που βρίσκεται πάνω στον άξονα και επίπεδο που είναι κάθετο στον άξονα. Όλα τα σημεία εκτελούν κυκλική κίνηση με την ίδια γωνιακή μετατόπιση $\Delta\theta$ και την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω .

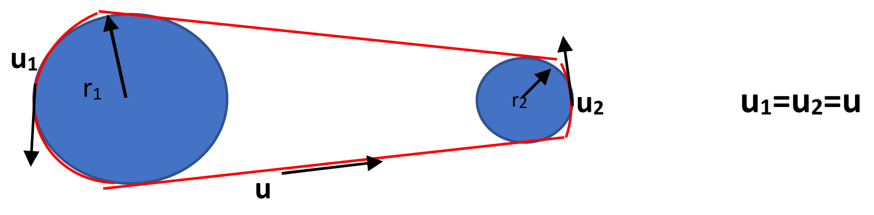
<u>Μετάδοση περιστροφικής κίνησης</u>

Με τη χρήση ιμάντα, αλυσίδας ή οδοντωτών τροχών από ένα κινητήριο άξονα σε ένα κινούμενο.

Όλα τα σημεία του ιμάντα, της αλυσίδας ή των οδοντωτών τροχών έχουν ίδια ταχύτητα u : u = κοινή

Αν d_1 και n_1 είναι η διάμετρος και οι στροφές του κινητήριου άξονα και d_2 και n_2 η διάμετρος και οι στροφές του κινούμενου άξονα, ισχύει :

$$d_1/d_2 = r_1/r_2 = n_2/n_1 = f_2 / f_1$$



Ασκήσεις

1. Δύο τροχοί με ακτίνες $r_1=2r_2$ περιστρέφονται με ιμάντα. Να υπολογίσετε : T_1/T_2 , ω_1/ω_2 , u_1/u_2 στην περιφέρεια

($T_1/T_2 = 2$, $\omega_1/\omega_2 = 1/2$, $u_1/u_2 = 1$)

1. Δύο τροχοί με ακτίνες $r_1=0,5r_2$ περιστρέφονται με ιμάντα. Αν $f_1 = 5Hz$, να υπολογίσετε: f_2, ω_2

($f_2 = 2,5Hz$, $\omega_2 = 5\pi$ rad/s)

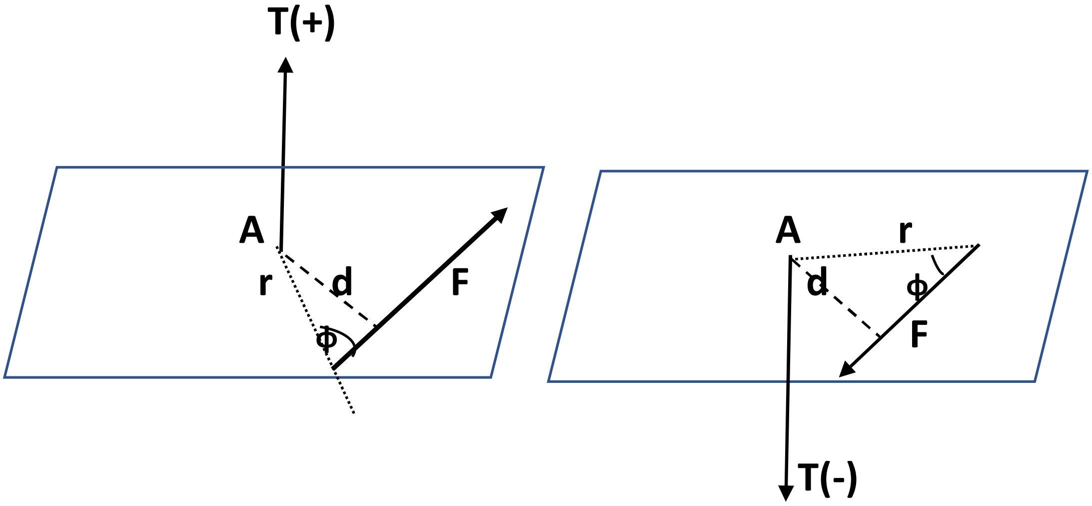
Ροπή δύναμης

Για να μεταφερθεί ένα στερεό απαιτείται δύναμη F, για να κάνει περιστροφική κίνηση απαιτείται και ένα άλλο διανυσματικό μέγεθος η ροπή της δύναμης T

α) Ροπή δύναμης ως προς σημείο

Ροπή δύναμης F ως προς σημείο A ονομάζουμε το διανυσματικό μέγεθος T που έχει:
***Διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο (F,A)**
***Φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιόστροφου χεριού**
(αριστερόστροφη φορά - θετική, δεξιόστροφη – αρνητική)
***Μέτρο T=F*d , όπου d η απόσταση του σημείου A από το φορέα της F, d=r*ημφ (το d μπορεί να καταλήγει σε σημείο έξω από το διάνυσμα F)**
***Μονάδα στο SI: N m**

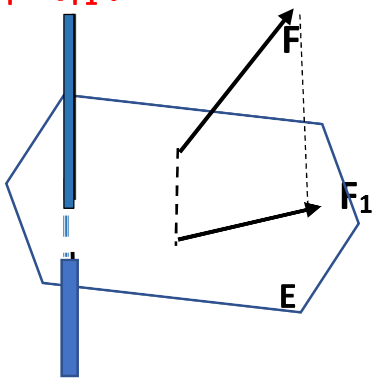
Προσοχή: Η δύναμη μεταφέρει το σώμα – η ροπή της το περιστρέφει



β) ως προς άξονα

i) Αν ο άξονας τέμνει κάθετα το επίπεδο της F και A το σημείο τομής του άξονα με το επίπεδο της F. Η ροπή ορίζεται όπως και προηγουμένως:
T= F * d, όπου d η απόσταση του A από το φορέα της δύναμης. Φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού και η διεύθυνση της T είναι αυτή του άξονα (η ροπή βρίσκεται πάνω στον άξονα)

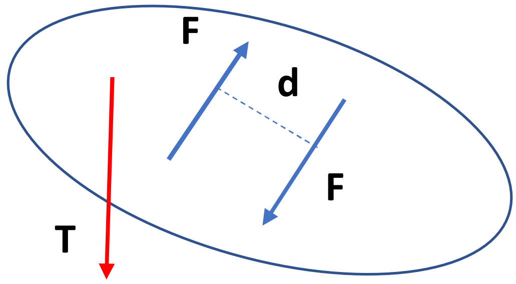
ii) αν η F δεν βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα, θεωρούμε ένα επίπεδο E κάθετο στον άξονα και φέρνουμε την προβολή F1 της F πάνω στο E.
Τότε $T_F = T_{F1}$.



γ) ροπή ζεύγους δυνάμεων

Ζεύγος δυνάμεων ονομάζουμε το σύστημα δύο ίσων και αντίθετων δυνάμεων που ασκούνται σε διαφορετικά σημεία του ίδιου στερεού.

Ως ροπή του ζεύγους ορίζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει μέτρο το γινόμενο της μιας δύναμης επί τη μεταξύ τους απόσταση, διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του ζεύγους και φορά σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, T =F * d



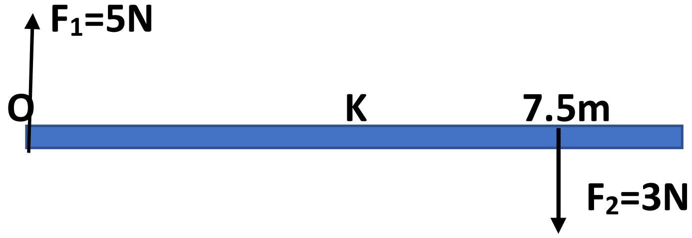
Η ροπή του ζεύγους είναι ανεξάρτητη του σημείου εφαρμογής του, γι’ αυτό και το σημείο εφαρμογής της ροπής μπορεί να είναι οποιοδήποτε.

<u>Παραδείγματα υπολογισμού Τολ</u>

Υπολογίστε την Τολ στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) ως προς την αρχή της ράβδου Ο και β) ως προς το μέσο της Κ. Η ράβδος έχει μήκος 10m και θεωρείται αβαρής.

i)

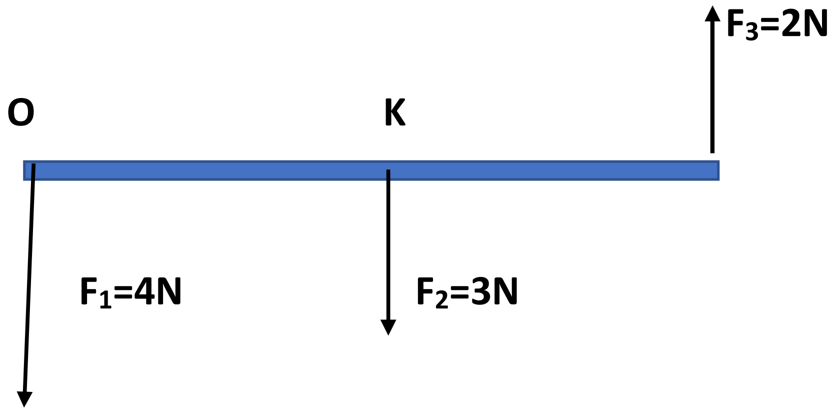


$T_{ολ}(O) = T_{F1}(O) + T_{F2}(O) \Rightarrow T_{ολ}(O) = 0 - F_2 * 7,5 = -3*7,5 \Rightarrow$

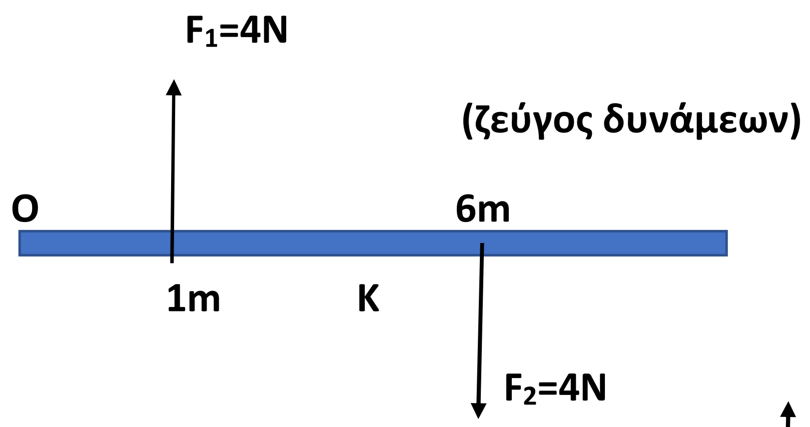
$T_{ολ}(O) = -22,5$ N m (στρέφει τη ράβδο προς τα δεξιά)

$T_{ολ}(K) = T_{F1}(K) + T_{F2}(K) \Rightarrow T_{ολ}(K) = -F_1*5 - F_2*2,5 = -5*5-3*2,5 = -25-7,5 \Rightarrow T_{ολ}(K) = -32,5$N m

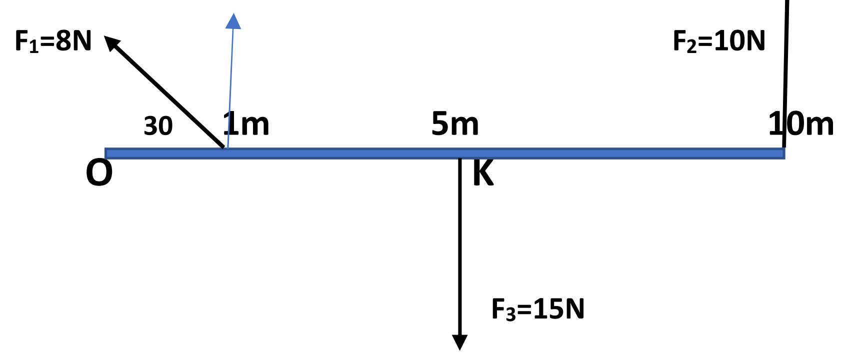
ii)



iii)



iv)



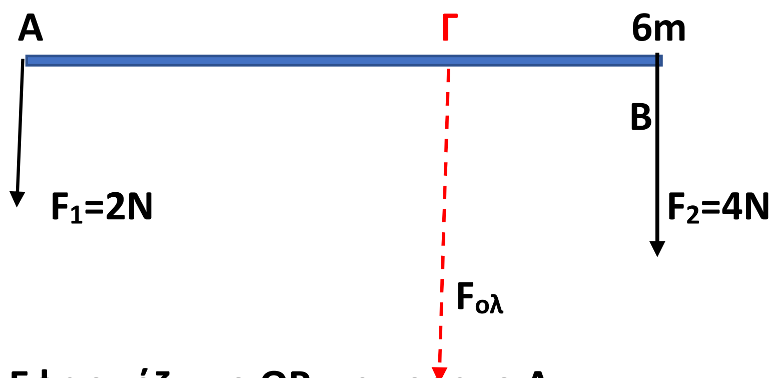
Θεώρημα ροπών ή θεώρημα του Varignon

Αν σε ένα σώμα ασκούνται πολλές δυνάμεις, η συνισταμένη των ροπών ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης

$$\overline{\tau}_{o\lambda} = \overline{\tau}_{F1} + \overline{\tau}_{F2} + \ldots + \overline{\tau}_{F\nu} = \overline{\tau}_{Fo\lambda}$$

Παραδείγματα υπολογισμού $F_{o\lambda}$ με τη βοήθεια του Θ.Ρ

i) ▸ **Δύο ομόρροπες δυνάμεις**



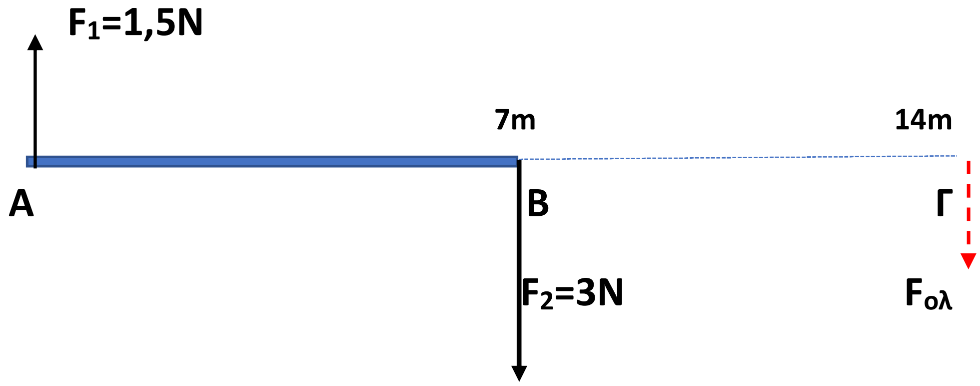
Εφαρμόζω το ΘΡ ως προς το Α

Fολ= 2 + 4 =6N προς τα κάτω (αρνητική ροπή)
Έστω Γ το σημείο εφαρμογής της Fολ
$T_{F_{ολ}}=T_{F1} + T_{F2}$ => - $F_{ολ}$* x = - F_2*6 =>
-6*x = -4*6 => x=4m

Γενικά για ομόρροπες δυνάμεις ισχύει:
$F_1 / F_2 = ΒΓ/ΑΓ$

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α και Β ,προς το μέρος της μεγαλύτερης F .

ii) Δύο αντίρροπες δυνάμεις



Εφαρμόζω το ΘΡ ως προς το Α

Fολ= 3-1,5 =1,5N προς τα κάτω (αρνητική ροπή)

Έστω Γ το σημείο εφαρμογής της Fολ

$T_{F_{ολ}}=T_{F1} + T_{F2}$ => - $F_{ολ}$* x = - F_2*7 =>

-1,5* x = -3*7=> x=21/1,5 => x=14m

Το σημείο εφαρμογής της συνισταμένης **δεν** βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία Α και Β (στην συγκεκριμένη περίπτωση εκτός της ράβδου), προς το μέρος της μεγαλύτερης F . Αν ήταν μεγαλύτερη η F_1, θα βρισκόταν αριστερά του Α και το x<0

Γενικά για αντίρροπες δυνάμεις ισχύει:
$F_1 / F_2 = ΒΓ/ΑΓ$

Περιστροφή στερεού

Κατά την στροφική (ή περιστροφική) κίνηση εμφανίζονται νέα φυσικά μεγέθη και ισχύουν νέοι νόμοι. Ένα από αυτά είναι η ροπή Τ. Ένα άλλο είναι η ροπή αδράνειας Ι :

Ως ροπή αδράνειας Ι ενός υλικού σημείου μάζας m ως προς άξονα που απέχει απόσταση r από το σημείο , ορίζουμε το μέγεθος : $I = mr^2$. Είναι μονόμετρο μέγεθος και η μονάδα του στο SI είναι: $Kg\ m^2$

Ως ροπή αδράνειας Ι ως προς άξονα ενός στερεού (σύστημα πολλών υλικών σημείων) ορίζουμε το μέγεθος

$$I=\Sigma m_i r_i^{\,2}$$

Δηλαδή το άθροισμα το ροπών αδρανείας όλων των υλικών σημείων.

Βλέπουμε ότι η ροπή αδράνειας εξαρτάται από την μάζα του στερεού, από την κατανομή της και από τον προσανατολισμό και τη θέση του άξονα περιστροφής.

Αν θεωρήσουμε ένα κυκλικό δίσκο μάζας m και ακτίνας r και έναν σφόνδυλο ίδιας μάζας και ακτίνας, ο σφόνδυλος θα έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας.

Σφόνδυλος είναι ένας τροχός που όλη σχεδόν η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια (έχει πολύ βαριά εξωτερική στεφάνη) και στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδο του.

Θεώρημα Steiner : Αν $I_{κ.μ}$ είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού μάζας m, ως προς άξονα που περνά από το κ.μ(κέντρο μάζας) του, τότε η ροπή αδράνειας Ι ως προς άξονα , παράλληλο προς τον αρχικό, που διέρχεται από σημείο Α που απέχει x από το κ.μ είναι: $I_A = I_{κ.μ} + m\,x^2$ (Παράδειγμα σελ67)

Ένα άλλο φυσικό μέγεθος που χρησιμεύει στην περιγραφή της περιστροφικής κίνησης είναι η **στροφορμή L :**

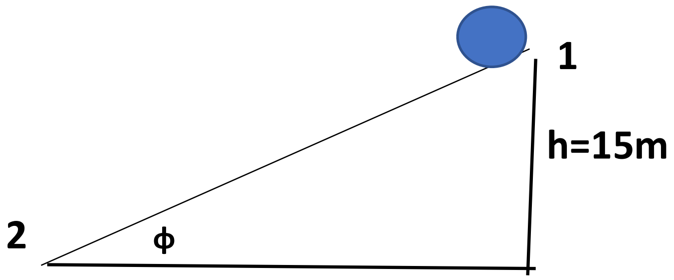
Στροφορμή L ενός στερεού μάζας m που έχει ροπή αδράνειας I και περιστρέφεται γύρω από άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω, ορίζουμε το διανυσματικό μέγεθος που έχει:

μέτρο **L = Iω** , κατεύθυνση ίδια με το ω και μονάδα στο SI: Kg m^2 rad/s

Υπάρχει μία αντιστοιχία μεγεθών και νόμων μεταξύ της μεταφορικής και της στροφικής κίνησης

Μεταφορική κίνηση	Στροφική κίνηση
Γραμμική ταχύτητα u=ωR	Γωνιακή ταχύτητα ω=u/R
Επιτάχυνση α=du/dt	Γωνιακή επιτάχυνση $α_{γων}$=dω/dt
x μετατόπιση	φ γωνία
Μάζα m	Ροπή αδράνειας I
Δύναμη F	Ροπή δύναμης T
Ορμή p=mu	Στροφορμή L=Iω
ΑΔΟ: Αν $ΣF_{εξ}$=0=>ΔP=0	ΑΔΣ: Αν $ΣT_{Fεξ}$=0=> ΔL=0
Θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής : F=mα	Θεμελιώδης νόμος της στροφικής: T=I$α_{γων}$
Γενικευμένη μορφή: F=dp/dt	Γενικευμένη μορφή: T = dL/dt
K=1/ 2 mu^2	K = 1/ 2 I $ω^2$
U=mgh(λόγω θέσης)	U=mgh(λόγω θέσης)
W=F s	W= T φ
P(ισχύς)= Fu	P= T ω
F=kx νόμος του Hooke	T=Dφ νόμος του Hooke για στρέψη
U=1/2 kx^2 (παραμόρφωση)	U=1/2 $Dφ^2$ (παραμόρφωση

Παράδειγμα κύλισης: **Τροχός ακτίνας R και μάζας m αφήνεται στην κορυφή λείου κεκλιμένου επιπέδου, ύψους 15m και κλίσης φ. Να βρείτε με ποια ταχύτητα θα φτάσει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.($g=10m/s^2$, $I_{τροχού}=mR^2$)**



ΑΔΜΕ: $E_{μηχ1} = E_{μηχ2} \Rightarrow K1+U1 = K2 + U2 \Rightarrow$

$$U1 = K2 \Rightarrow 0+mgh = 1/2\, mu^2 + 1/2\, I\, ω^2 + 0 \Rightarrow$$

$$mgh = 1/2\, m\, u^2 + 1/2\, (mR^2)\, (u^2 / R^2) \Rightarrow$$

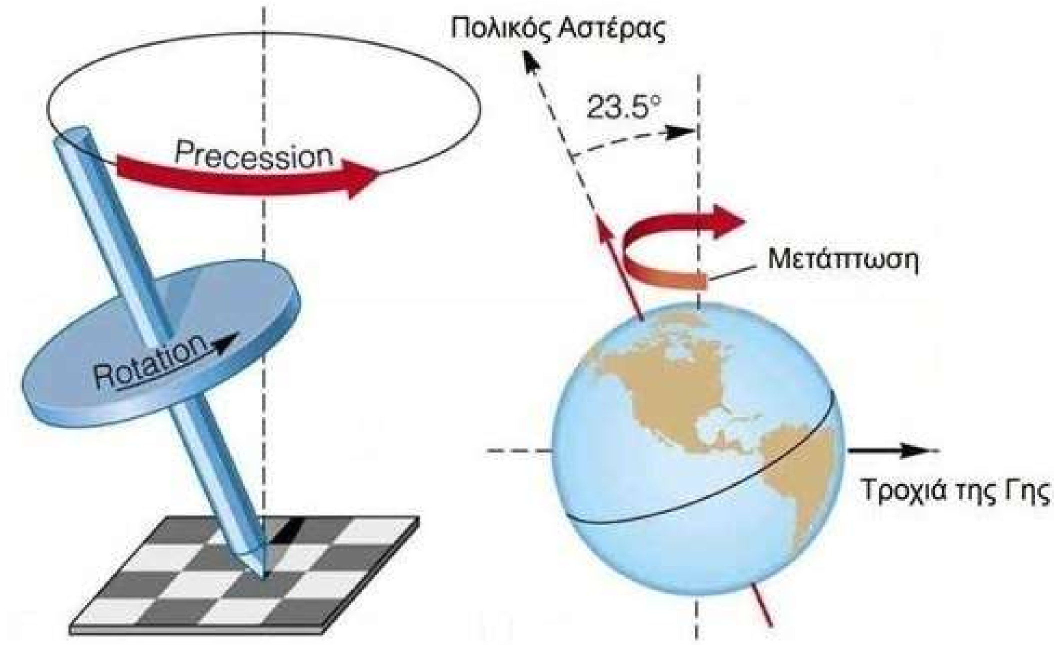
$$gh = 1/2\, u^2 + 1/2\, u^2 = u^2 \Rightarrow u= \sqrt{gh}=\sqrt{10*15} \Rightarrow$$

$$u= 12{,}25 \ m/s$$

(παραδείγματα σελ 89-90)

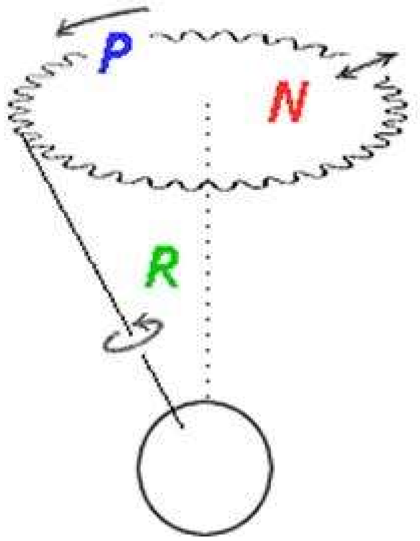
Περιστροφή της γης

Η γη κάνει μια πλήρη περιστροφή γύρω από έναν φαινομενικά σταθερό άξονα , με φαινομενικά σταθερή γωνιακή ταχύτητα σε 24 ώρες. Όμως επειδή δεν είναι σφαιρική, αλλά παρουσιάζει διόγκωση στον ισημερινό, δέχεται άνισες ελκτικές δυνάμεις κυρίως από τον ήλιο και τη σελήνη, με αποτέλεσμα να αναπτύσσονται ροπές και ο άξονας της να μεταπίπτει, όπως ο άξονας μιας σβούρας, και να διαγράφει ένα κώνο, με άξονα κάθετο στο επίπεδο της εκλειπτικής (επίπεδο της τροχιάς της γης γύρω από τον ήλιο), γωνιακό άνοιγμα 23° 26' 22'' και περίοδο περιστροφής 25.795 έτη. Αυτό το φαινόμενο λέγεται μετάπτωση του άξονα της γης.



Επίσης ο άξονας της γης παρουσιάζει κάποιες μικρές περιοδικές αποκλίσεις από τη μεταπτωτική του θέση (9'' εκατέρωθεν μιας μέσης θέσης) και κάνει μια δεύτερη ελλειπτική κίνηση που ονομάζεται κλονισμός και έχει

περίοδο 18,6 έτη. Αυτή οφείλεται στην περιστροφή της σελήνης γύρω από την γη. Αποτέλεσμα του κλονισμού είναι, ο άξονας της γης μέσα σε 25795 έτη να διαγράφει μια κωνική επιφάνεια που η βάση της δεν είναι κύκλος αλλά μια κλειστή κυματοειδή καμπύλη που φέρει περίπου 1400 ελλειπτικές κυμάνσεις.



Γυροσκόπιο

Το γυροσκόπιο είναι μια συσκευή η οποία μπορεί να διατηρεί σταθερό τον προσανατολισμό της μέσω της περιστροφής των μερών της και της αρχής της διατήρησης της στροφορμής.
Ο εσωτερικός σφόνδυλος διατηρεί το επίπεδό του και τον άξονα του σταθερό χάρη στις δύο εξωτερικές στεφάνες που μπορούν να στρέφονται ελεύθερα πάνω-κάτω και δεξιά-αριστερά. Έτσι αν αναπτυχθεί μια εξωτερική ροπή, οι εσωτερικές στεφάνες στρέφονται και αναπτύσσουν αντίθετη ροπή με αποτέλεσμα η στροφορμή του σφονδύλου να διατηρείται σταθερή,
Στο γυροσκόπιο βασίζεται η λειτουργία της γυροσκοπικής πυξίδας που είναι μία πολύπλοκη ηλεκτρομηχανική κατασκευή, η οποία όμως έχει ένα βασικό πλεονέκτημα: δεν επηρεάζεται από τα μαγνητικά πεδία

Κέντρο βάρους στερεού σώματος

Ένα στερεό σώμα μάζας m θεωρούμε ότι αποτελείται από πολλά υλικά σημεία, με στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \ldots m_\nu$. Το κάθε υλικό σημείο έχει ένα στοιχειώδες βάρος $B_1, B_2, \ldots B_\nu$. Η συνισταμένη αυτών των στοιχειωδών βαρών, που είναι παράλληλα και ομόρροπα (κατακόρυφα) είναι το βάρος Β του σώματος και το σημείο εφαρμογής του λέγεται κέντρο βάρους του σώματος (Κ.Β).

Το Κ.Β ενός σώματος είναι το σημείο από το οποίο περνάει ο φορέας του βάρους , όπως και αν περιστρέψουμε το σώμα. Το διάνυσμα θέσης του είναι:

$$r = \Sigma B_i r_i / B$$

Σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας (g=σταθ),

ισχύει $r = \Sigma g m_i r_i / g m = r_{κμ}$

Άρα το Κ.Β σε ένα ομογενές πεδίο βαρύτητας συμπίπτει με το κέντρο μάζας.

Το Κ.Β δεν είναι υποχρεωτικό να βρίσκεται μέσα στο στερεό. Π.χ σε ένα δακτύλιο βρίσκεται στο κέντρο του, όπου δεν υπάρχει μάζα.

Εύρεση Κ.Β

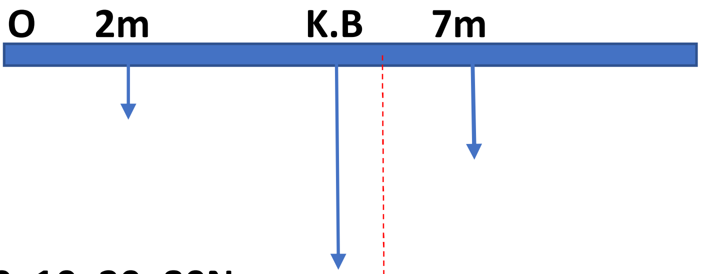
1. **Σε σώμα ομογενές (σταθερή πυκνότητα) με κανονικό σχήμα: συμπίπτει με το γεωμετρικό κέντρο του. Π.χ το κέντρο του κυκλικού δίσκου, το σημείο τομής των διαγώνιων του παραλληλογράμμου κτλ.**
2. **Σε σώμα με λεπτό πάχος και ακανόνιστο σχήμα: βρίσκεται με τη μέθοδο της διπλής αναρτήσεως. Αναρτούμε το σώμα από δύο διαφορετικά σημεία, στα οποία και τοποθετούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος της στάθμης. Χαράσσουμε τη διεύθυνση του**

νήματος πάνω στο στερεό και στις δύο περιπτώσεις. Εκεί που τέμνονται οι διευθύνσεις είναι το Κ.Β

3. **Σε σύστημα σωμάτων εφαρμόζουμε το θεώρημα τον ροπών.**

Το Κ.Β είναι το κέντρο ισορροπίας του σώματος ή του συστήματος. Δηλαδή στην πράξη, από το σημείο που βάζουμε ένα στήριγμα και το σώμα ισορροπεί, περνάει ο φορέας του βάρους .

Παράδειγμα: **Έστω μία ομογενής ράβδος μήκους 10m και βάρους B=50N. Αν τοποθετήσουμε δύο επιπλέον βάρη B_1=10N και B_2=20N στα 2m και 7m αντίστοιχα, πού θα βρίσκεται το Κ.Β του συστήματος;**



$B_{ολ}$=50+10+20=80N

Θ.Ρ ως προς την αρχή Ο: $B_{ολ}$

$T_{Bολ}=T_B+T_{B1}+T_{B2}$ => $-B_{ολ}x = -50*5-10*2-20*7$ =>

$-80x=-410$ => $x=5{,}125$m

Ισορροπία στερεού

Είδη ισορροπίας

Ευσταθής: Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο επιστρέφει σε αυτή

Ασταθής: Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο απομακρύνεται περισσότερο από αυτή

Αδιάφορη: Αν το σώμα απομακρυνθεί από τη θέση ισορροπίας του, μόλις αφεθεί ελεύθερο ισορροπεί στη νέα του θέση

Συνθήκες ισορροπίας στερεού

Για να ισορροπεί ένα στερεό σώμα δεν αρκεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του να είναι μηδέν. Πρέπει να είναι μηδέν και η συνισταμένη των ροπών

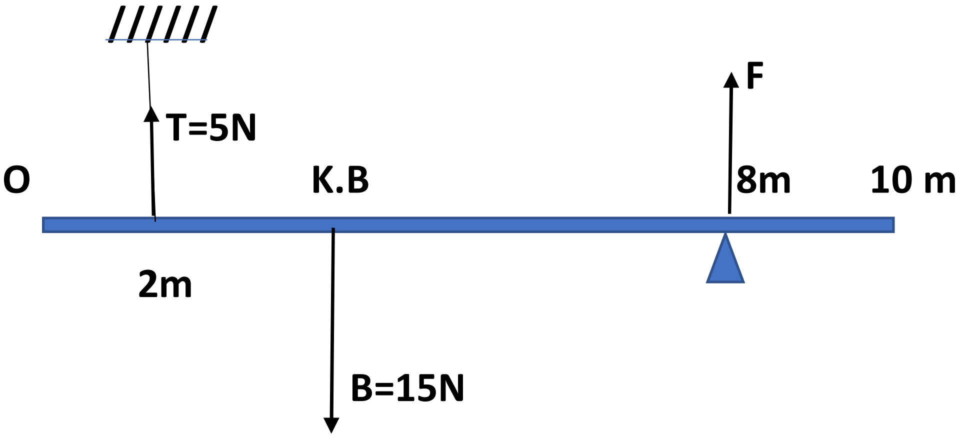
$$\Sigma \vec{F}_i=0 \qquad \& \quad \Sigma \vec{T}_i=0$$

όπου i=x,y,z οι τρεις συντεταγμένες στον χώρο

- **Αν ΣF=0 και ΣT≠0: περιστρέφεται**
- **Αν ΣF≠0 και ΣT=0: μεταφέρεται**
- **Αν ΣF≠0 και ΣT≠0 : σύνθετη κίνηση (κυλίεται)**

Ασκήσεις:

1. Αν η μη ομογενής ράβδος του σχήματος ισορροπεί, να υπολογίσετε το Κ.Β της και τη δύναμη F.



$F_{ολ}=0 \Rightarrow F+T=B \Rightarrow F=B-T=15-5 \Rightarrow F=10N$

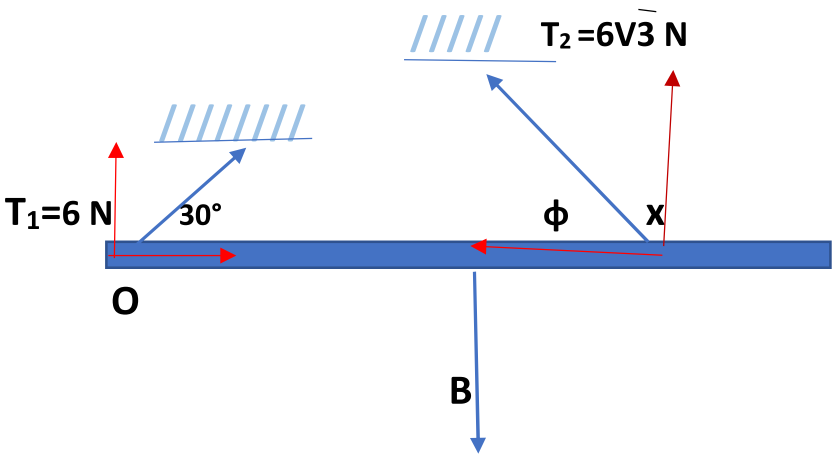
$T_{ολ}(O)=0 \Rightarrow T*2 - B*x + F*8=0 \Rightarrow 5*2 - 15*x + 10*8=0 \Rightarrow$

$10+80=15x \Rightarrow x=90/15 \Rightarrow x=6m$

2. Μία ομογενής δοκός μήκους 8m και βάρους B ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε τη θέση που δένεται το 2° σχοινί ,την κλίση του και το βάρος της δοκού.

Δίνονται:

ημ30°=1/2, συν30°=$\sqrt{3}/2$,ημ60°=$\sqrt{3}/2$, συν60° = 1/2 ,



$\Sigma Fx = 0 \Rightarrow T_{1x} = T_{2x} \Rightarrow 6 * συν30° = 6\sqrt{3} * συνφ \Rightarrow$

$6 * \sqrt{3}/2 = 6\sqrt{3}$ συνφ => συνφ = 1/ 2 => $φ = 60°$

$\Sigma Fy=0 \Rightarrow T_{1y} + T_{2y} = B \Rightarrow$

T_1 ημ30° + T_2 ημ60° =B

$6 * 1/2 + 6 * \sqrt{3} * \sqrt{3} / 2 = B \Rightarrow B = 3+9 \Rightarrow B=12N$

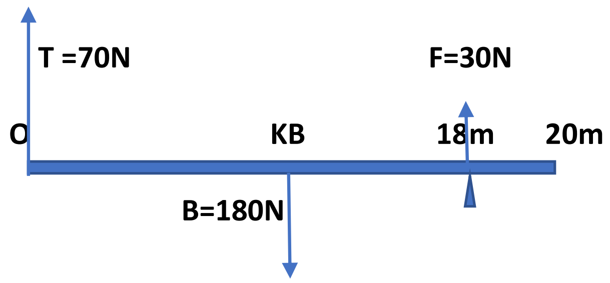
$T_{2y}=9N$

Η δοκός είναι ομογενής, άρα το Κ.Β βρίσκεται στα 4m

$\Sigma T_y(O) = 0 \Rightarrow T_{T1y} - T_B + T_{T2y} = 0 \Rightarrow 0 - 12 * 4 + 9 * x = 0 \Rightarrow$

$48 = 9x \Rightarrow x = 5,33m$

3. Μία ομογενής δοκός μάζας 5kg και μήκους 20m ισορροπεί στηριζόμενη σε δύο τάκους που βρίσκονται στα 5m και 15m. Υπολογίστε τις δυνάμεις που ασκούν οι τάκοι στην δοκό ($g=10m/s^2$)
(Απάντηση: $F_1=F_2=25N$)
4. Μία ομογενής δοκός βάρους 30N και μήκους 10m φορτώνεται με τρία επιπλέον βάρη B1=10N, B2=7N και B3=13N στα 2m, 4m και 8m αντίστοιχα. Πόσο και προς τα πού μετατοπίστηκε το κέντρο βάρους του συστήματος;(Ή πού πρέπει να βάλω ένα στήριγμα για να ισορροπήσει η φορτωμένη δοκός;)
(Απάντηση: προς τα δεξιά 3,3cm)
5. Τι χρειάζεται για να ισορροπήσει η ομογενής δοκός του σχήματος:



(B’=80N, στα 15,75m)

Απλές Μηχανές

Απλή μηχανή ονομάζουμε ένα σύστημα σωμάτων που λαμβάνει μηχανική ενέργεια και την μεταφέρει σε ένα άλλο σώμα. (Δεν τη μετασχηματίζει όπως οι κινητήριες μηχανές)
Με τις απλές μηχανές συνήθως μετακινούμε φορτία και πετυχαίνουμε να καταβάλλουμε μικρότερη δύναμη ή να αλλάξουμε τη διεύθυνση της δύναμης προς διευκόλυνσή μας .

Κινητήρια δύναμη $F_{κ}$: η δύναμη που παράγει έργο (αυτή που συνήθως ασκούμε εμείς)
Ωφέλιμη αντίσταση ή δύναμη $F_{α}$: το φορτίο που ανυψώνουμε ή μετακινούμε
Παθητική αντίσταση $F_{πα}$: η δύναμη που απορροφά ενέργεια. Π.χ τριβή

σκοπός απλών μηχανών $F_{κ} < F_{α}$

Ενεργό μηχανικό πλεονέκτημα (ΕΜΠ) = $F_{α}/ F_{κ}$

Ιδανικό μηχανικό πλεονέκτημα (ΙΜΠ) = $S_{κ}/ S_{α}$
S: μετατόπιση σημείου εφαρμογής
Απόδοση απλής μηχανής: $α = W_{ωφελ} / W_{δαπ} = W_{Fα} / W_{Fκ}$
=> $α = F_{α} * S_{α} / F_{κ} * S_{κ}$ =>

$$α = ΕΜΠ/ΙΜΠ$$

Στις απλές μηχανές συνήθως οι παθητικές αντιστάσεις είναι αμελητέες και ισχύει η ΑΔΜΕ, που στην περίπτωση τους ορίζεται ως αρχή των δυνατών έργων (ΑΔΕ):

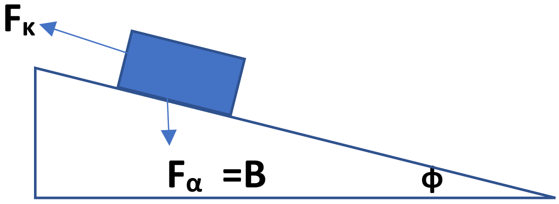
$W_{F\kappa} = W_{F\alpha}$ (ΑΔΕ) $\Rightarrow F_\kappa * S_\kappa = F_\alpha * S_\alpha \Rightarrow F_\kappa / F_\alpha = S_\alpha / S_\kappa$

=> ΕΜΠ=ΙΜΠ => α=1 απόδοση 100%

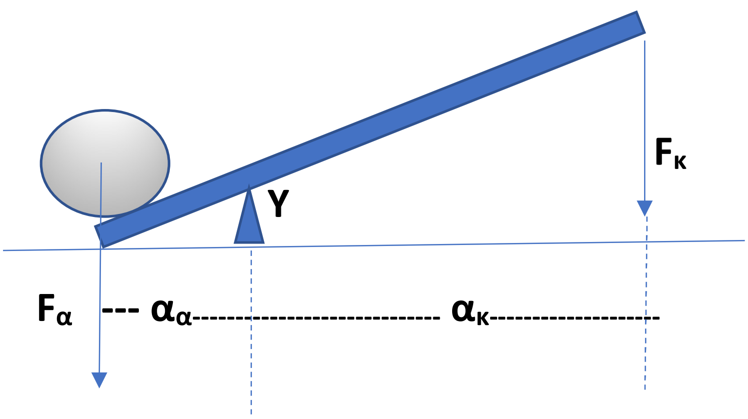
Η παραπάνω σχέση αποτελεί το χρυσό κανόνα της μηχανικής : ότι κερδίζουμε σε δύναμη , το χάνουμε σε δρόμο και αντίστροφα

Είδη απλών μηχανών

1. **Κεκλιμένο επίπεδο: F_κ = B ημφ = F_α ημφ**
   Όσο μικρότερη κλίση (φ) , τόσο μικρότερη δύναμη ασκούμε

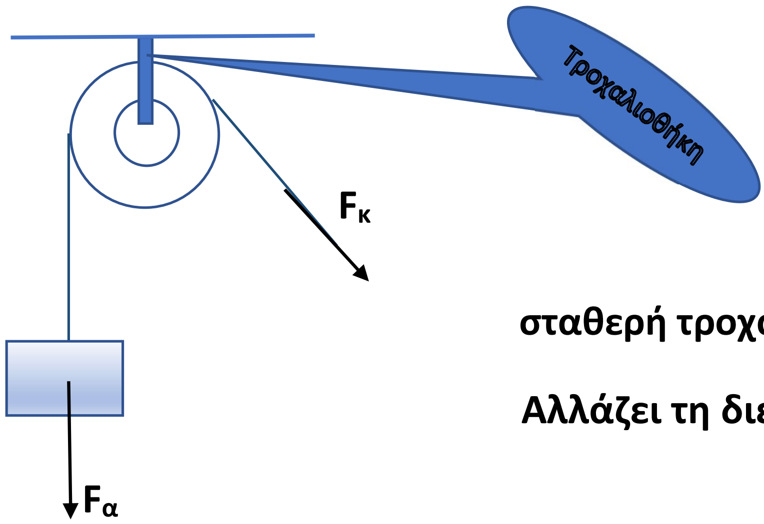


2. **Μοχλός : $F_\kappa = F_\alpha * \alpha_\alpha / \alpha_\kappa = F_\alpha * S_\alpha / S_\kappa$, όπου α_α και α_κ οι μοχλοβραχίονες της αντίστασης και της κινητήριας δύναμης, δηλαδή οι αποστάσεις των σημείων εφαρμογής τους από το υπομόχλιο και S_α και S_κ οι μετατοπίσεις των σημείων εφαρμογής.**



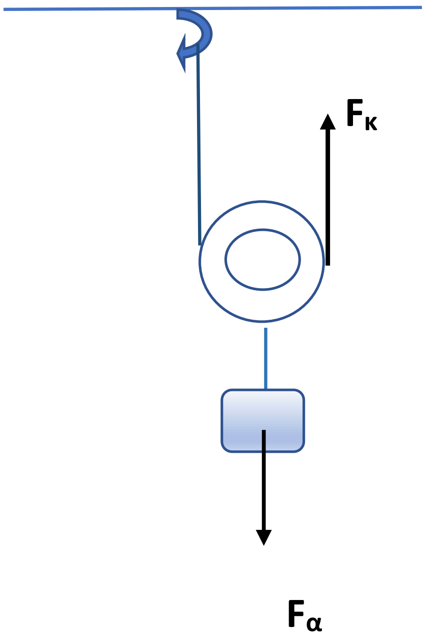
Όσο πιο κοντά βρίσκεται το υπομόχλιο στο φορτίο, τόσο μικρότερη δύναμη καταβάλλουμε.

3. Τροχαλίες: σταθερές(πάγιες) – ελεύθερες – μεικτές



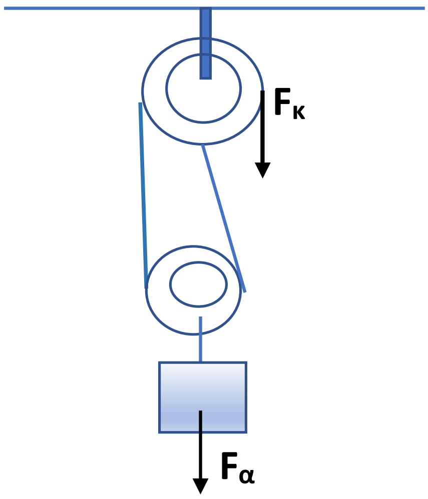
σταθερή τροχαλία : $F_\kappa = F_\alpha$

Αλλάζει τη διεύθυνση



$F_\kappa = F_\alpha/2$

Ελεύθερη τροχαλία:



Μεικτή τροχαλία:

$F_\kappa = F_\alpha/2$ και ταυτόχρονα

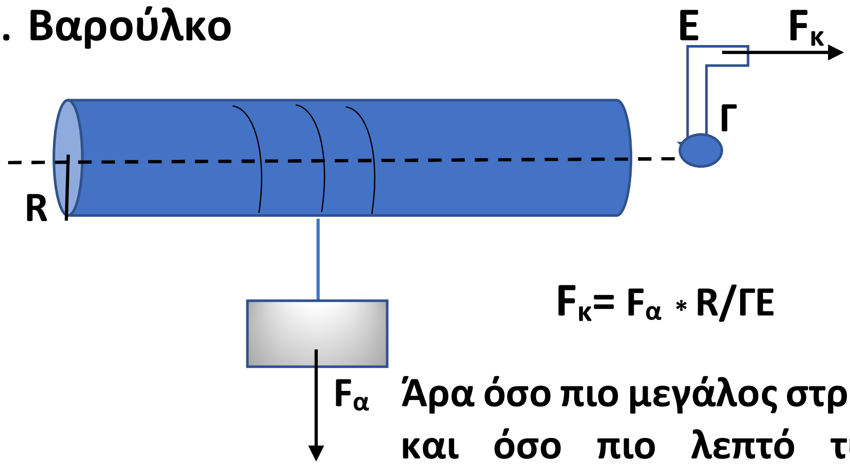
Αλλάζει διεύθυνση

4. **Πολύσπαστο**

Αποτελείται από δύο ή περισσότερες σταθερές τροχαλίες με κοινή τροχαλιοθήκη και από ίσο πλήθος ελεύθερων τροχαλιών πάλι με κοινή τροχαλιοθήκη. Αν ν ο συνολικός αριθμός τροχαλιών (ελεύθερες+πάγιες): $F_κ = F_α/ν$

$S_κ = S_α * ν$

5. **Βαρούλκο**



$F_κ = F_α * R/ΓΕ$

Άρα όσο πιο μεγάλος στρόφαλος και όσο πιο λεπτό τύμπανο (μικρή ακτίνα R), τόσο πιο μικρή δύναμη ασκούμε.

Μια μορφή βαρούλκου, αλλά με κατακόρυφο άξονα, είναι και ο εργάτης που χρησιμοποιείται για να τραβά την άγκυρα μικρών πλοίων.

6. Κοχλίας (γρύλος)

Ο κοχλίας περιστρέφεται με τη βοήθεια ενός βραχίονα μήκους R. Αν L είναι το βήμα, δηλαδή η απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών ελικώσεων: $F_\kappa = F_\alpha * L/2\pi R$

Άρα για να σηκώσουμε εύκολα ένα βάρος , χρειαζόμαστε μικρό βήμα και μεγάλο βραχίονα.

Οι παραπάνω σχέσεις προκύπτουν από:

i) **ΣΤ=0, γιατί οι απλές μηχανές ισορροπούν**
ii) **$F_{\pi\alpha}$ αμελητέες, άρα $T_{F\kappa}=T_{F\alpha}$=> ΕΜΠ=ΙΜΠ άρα α=1**

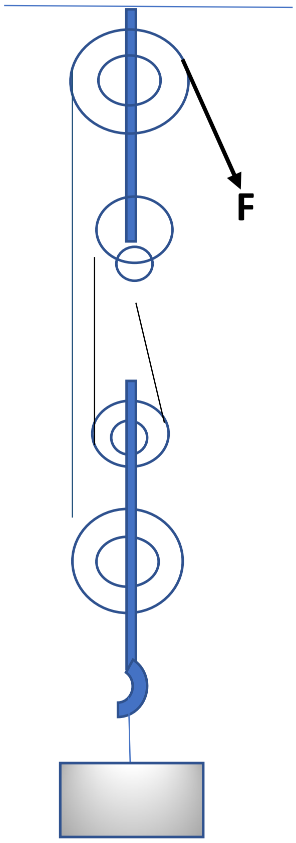
Αν οι $F_{\pi\alpha}$ δεν μπορούν να αγνοηθούν, όπως σε ένα πολύσπαστο με πολλές τροχαλίες και σχοινιά, τότε α<1 και κερδίζουμε σε δύναμη λιγότερο από ότι χάνουμε σε δρόμο.

<u>Ασκήσεις</u>

1. **Ένας μοχλός μήκους 1,5m χρησιμοποιείται για να ανυψώσει φορτίο 400kg. Πού πρέπει να τοποθετηθεί το υπομόχλιο ώστε να ασκήσουμε δύναμη 1000N ; ($g=10m/s^2$) (απάντηση: 30cm από το φορτίο)**

2. **Ένα βαρούλκο έχει στρόφαλο μήκους 80cm και τύμπανο ακτίνας 10cm. Αν ασκήσουμε δύναμη 100N , σηκώνει βάρος 750N . Να υπολογίσετε το ΕΜΠ, το ΙΜΠ και την απόδοση του.**
   ΕΜΠ= F_α / F_κ = 750/100=7,5
   ΙΜΠ= S_κ / S_α=Lστροφ/R = 80/10=8
   α= ΕΜΠ/ΙΜΠ=7,5/8=0,9375 93,75%

3.



Αν το φορτίο είναι 400kg, πόση δύναμη πρέπει να ασκήσουμε στο πολύσπαστο του σχήματος, αν η απόδοσή του είναι: α) α=1 β) α=0,95 (g=10m/s^2)

απάντηση: α) 1000N β)~1053N