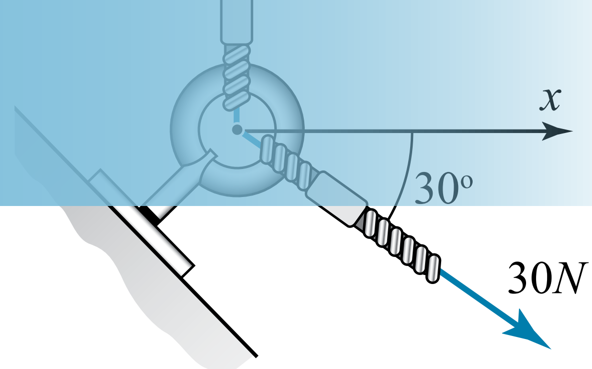
κεφάλαιο 7



Διανύσματα

Στις θετικές επιστήμες, διακρίνουμε δύο είδη φυσικών μεγεθών. Υπάρχουν φυσικά μεγέθη που για να προσδιοριστούν πλήρως, αρκεί η γνώση της αριθμητικής τους τιμής και η μονάδα μέτρησής τους. Αυτά τα μεγέθη λέγονται ***μονόμετρα*** ή ***βαθμωτά***. Τέτοια μεγέθη είναι για παράδειγμα ο χρόνος, η μάζα, ο όγκος, η θερμοκρασία κ.ά. Υπαρχουν όμως και τα φυσικά μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από την αριθμητική τους τιμή και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους. Τέτοια μεγέθη λέγονται ***διανυσματικά*** μεγέθη. Διανυσματικά μεγέθη είναι η δύναμη, η μετατόπιση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση κ.ά. Τα διανυσματικά μεγέθη απεικονίζονται με τα διανύσματα, τα οποία θα παρουσιάσουμε στο κεφάλαιο αυτό. Τα διανύσματα έχουν σημαντικές εφαρμογές, κυρίως στη Φυσική, στη Μηχανική και στη Γεωμετρία.

7.1 Η έννοια του διανύσματος

Εφαρμοσμένο διάνυσμα ονομάζεται ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται ***αρχή*** ή ***σημείο εφαρμογής*** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται ***πέρας*** του διανύσματος.

Ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα συμβολίζεται με δύο κεφαλαία γράμματα κάτω από ένα βέλος, όπου το πρώτο γράμμα είναι η αρχή του διανύσματος και το δεύτερο το πέρας. Το διάνυσμα του σχήματος 7.1 με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται ως εξής: $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται ***μηδενικό***. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{\boldsymbol{AA}}$ είναι μηδενικό διάνυσμα. Το μηδενικό διάνυσμα συμβολίζεται ως εξής: $\vec{\boldsymbol{0}}$.

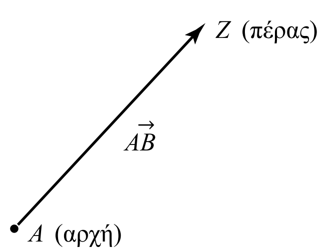
Ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ έχει τα εξής στοιχεία:

1) ***Μέτρο***, που είναι η απόσταση των άκρων του διανύσματος, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, και συμβολίζεται με $\left|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\right|$.

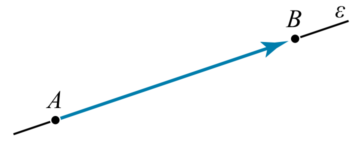
Αν ένα εφαρμοσμένο διάνυσμα έχει μέτρο ίσο με 1, λέγεται ***μοναδιαίο***.

2) ***Διεύθυνση***, που είναι η ευθεία ε που ορίζουν τα άκρα Α, Β ή οποιαδήποτε άλλη ευθεία παράλληλη προς αυτή (σχ. 7.2). Η ευθεία ε πάνω στην οποία βρίσκεται το $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$ λέγεται ***φορέας του*** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$.

3) ***Φορά***, που καθορίζεται από το αν το διάνυσμα έχει αρχή το Α και πέρας το Β, ή αρχή το Β και πέρας το Α.



Σχ. 7.1



Σχ. 7.2

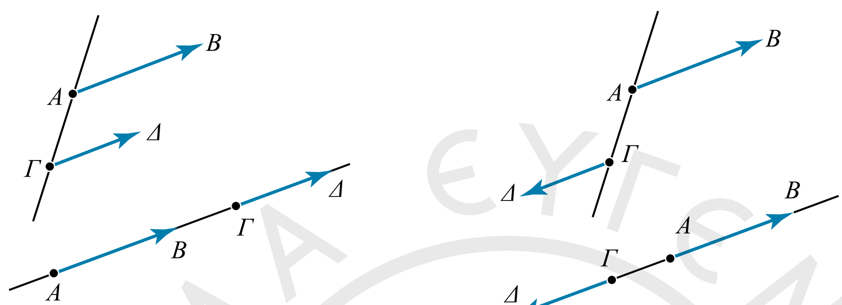
Η διεύθυνση μαζί με τη φορά καθορίζουν την ***κατεύθυνση*** ενός διανύσματος.

Δύο μη μηδενικά εφαρμοσμένα διανύσματα που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, δηλαδή έχουν την ίδια διεύθυνση, ονομάζονται ***παράλληλα*** ή ***συγγραμμικά***. Αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι συγγραμμικά, γράφουμε $\overrightarrow{AB} \,//\, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ονομάζονται:

1) ***Ομόρροπα*** αν είναι συγγραμμικά και έχουν ίδια φορά, δηλαδή έχουν ίδια κατεύθυνση [σχ. 7.3(α)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \upuparrows \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

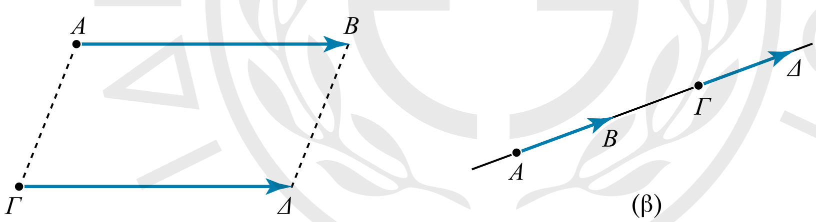
2) ***Αντίρροπα*** αν είναι συγγραμμικά και έχουν διαφορετική φορά [σχ. 7.3(β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



(α) (β)

Σχ. 7.3

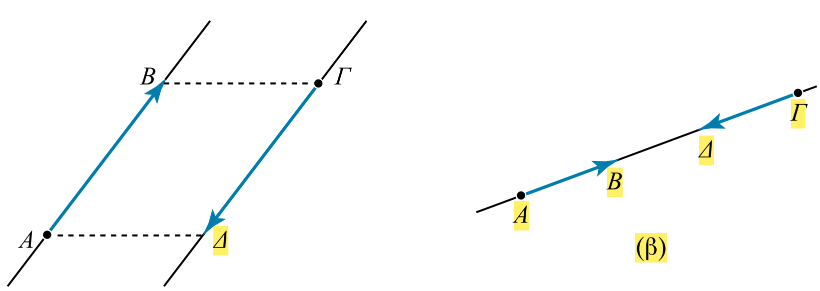
Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ***ίσα*** όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, την ίδια φορά και ίσα μέτρα [σχ. 7.4(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



(α) (β)

Σχ. 7.4

Δύο εφαρμοσμένα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται ***αντίθετα***, όταν έχουν την ίδια διεύθυνση, ίσα μέτρα και αντίθετη φορά [σχ. 7.5(α) και (β)]. Τότε γράφουμε $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



(α) (β)

Σχ. 7.5

Παρατηρήσεις

1) Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε θα ισχύουν και $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Gamma A} = \overrightarrow{\Delta B}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$. Αυτό συμβαίνει

διότι στο παραλληλόγραμμο $ΑΒΔΓ$ (σχ. 7.4α) οι απέναντι πλευρές είναι παράλληλες και ίσες, οπότε τα αντίστοιχα διανύσματα είναι παράλληλα και έχουν ίσα μέτρα.

2) Ισχύει ότι: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

3) Ισχύει ότι: $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{ΓΔ} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ΔΓ}$

1) Ελεύθερο διάνυσμα

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει μέχρι τώρα, οποιαδήποτε δύο εφαρμοσμένα διανύσματα έχουν ίδια διεύθυνση, ίδια φορά και ίσα μέτρα, είναι ίσα. Έτσι, όλα τα άπειρα διανύσματα που είναι ίσα, αλλά διαφέρουν στο σημείο εφαρμογής τους, αποτελούν μια κλάση διανυσμάτων. Το σύνολο των διανυσμάτων επομένως διαμερίζεται σε κλάσεις ίσων μεταξύ τους διανυσμάτων. Ονομάζουμε ***ελεύθερο διάνυσμα*** ή πιο απλά ***διάνυσμα*** την κλάση των άπειρων ίσων μεταξύ τους εφαρμοσμένων διανυσμάτων.

Ένα ελεύθερο διάνυσμα αντιπροσωπεύεται από οποιοδήποτε εφαρμοσμένο που ανήκει στην κλάση του, και συμβολίζεται με ένα μικρό γράμμα κάτω από ένα βέλος. Για παράδειγμα: $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$. Για να δηλώσουμε ότι ένα ελεύθερο διάνυσμα $\vec{\alpha}$ αντιπροσωπεύεται από το εφαρμοσμένο διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ γράφουμε $\vec{\alpha} = \overrightarrow{AB}$.

Στη Φυσική γίνεται συχνά χρήση του ελεύθερου διανύσματος. Για παράδειγμα η ταχύτητα ενός κινητού όταν εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση καθορίζεται με ελεύθερο διάνυσμα.

2) Γωνία διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{\beta}$. Ονομάζουμε ***γωνία των*** $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή πιο απλά θ, την κυρτή γωνία $\widehat{AOB}$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB (σχ. 7.6).

Ισχύει ότι:

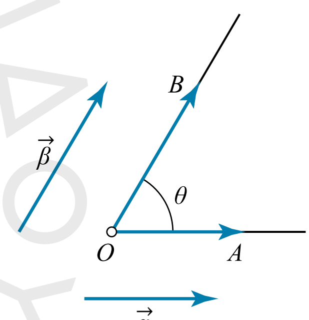
$$0^\circ \le \theta \le 180^\circ \text{ (σε μοίρες) ή } 0^\circ \le \theta \le \pi \text{ (σε rad).}$$

Ειδικά:

Αν $\vec{\alpha} \nearrow\nearrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 0^\circ$

Αν $\vec{\alpha} \nearrow\swarrow \vec{\beta}$, τότε $\theta = 180^\circ$

Αν $\theta = 90^\circ$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ λέγονται ***ορθογώνια*** ή ***κάθετα*** και γράφονται ως εξής: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.



Σχ. 7.6

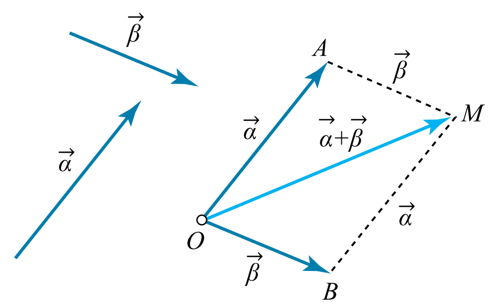
7.2 Πρόσθεση και αφαίρεση διανυσμάτων

7.2.1 Πρόσθεση διανυσμάτων

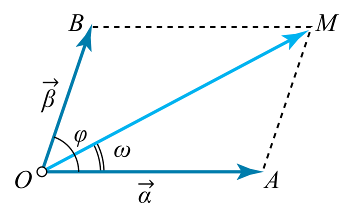
Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε ***άθροισμα των*** $\vec{\alpha}$ ***και*** $\vec{\beta}$ ένα νέο διάνυσμα, το οποίο συμβολίζεται με $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, και το οποίο μπορεί να κατασκευαστεί με τους εξής δύο τρόπους:

1) Με τον κανόνα του παραλληλογράμμου

Επιλέγουμε δύο αντιπροσώπους για τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή O και σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο που έχει πλευρές τα διανύσματα, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.7. Η διαγώνιος $\overrightarrow{OM}$ του παραλληλογράμμου που έχει ως αρχή την κοινή τους αρχή



Σχ. 7.7



Σχ. 7.8

ισούται με $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Το άθροισμα $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ είναι το ελεύθερο διάνυσμα που έχει το $\overrightarrow{OM}$ ως αντιπρόσωπο.

Μέτρο του $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$:

Το $|\vec{\alpha} + \vec{\beta}|$ είναι το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος *OM*. Για τον υπολογισμό του (*OM*) εφαρμόζουμε Νόμο Συνημιτόνων στο τρίγωνο *OAM* (σχ. 7.8).

$$(OM)^2 = (AM)^2 + (OB)^2 - 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$
$$(OM)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 - 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot \sigma\upsilon\nu\left(180 \;-\varphi\right) \Leftrightarrow$$
$$(OM)^2 = (OA)^2 + (OB)^2 + 2\cdot(OA)\cdot(OB)\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$$

$$\text{Ή } \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2 = \left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right| = \sqrt{\left|\vec{\alpha}\right|^2 + \left|\vec{\beta}\right|^2 + 2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}}$$

Διεύθυνση του $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$:

Εφαρμόζοντας τον Νόμο Ημιτόνων στο τρίγωνο *OAM:*

$$\frac{(OM)}{\eta\mu A} = \frac{(AM)}{\eta\mu\omega} \Leftrightarrow \frac{(OM)}{\eta\mu\left(180 \;-\varphi\right)} = \frac{(\mathrm{OB})}{\eta\mu\omega} \Leftrightarrow \frac{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}{\eta\mu\varphi} = \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\eta\mu\omega} \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\eta\mu\omega = \frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|}\cdot \eta\mu\varphi}$$

2) Με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων

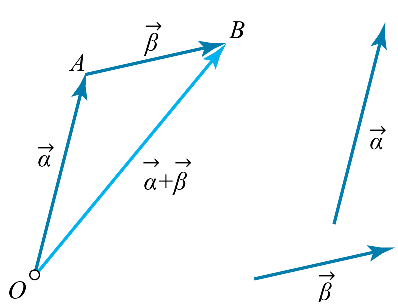
Μεταφέρουμε παράλληλα τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ που θέλουμε να προσθέσουμε, ώστε να γίνουν διαδοχικά. Το άθροισμά τους $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$ θα είναι το διάνυσμα που θα έχει αρχή την αρχή του $\vec{\alpha}$ και πέρας το πέρας του $\vec{\beta}$ (σχ. 7.9).

Με τον δεύτερο τρόπο μπορούμε να προσθέσουμε περισσότερα από δύο διανύσματα.

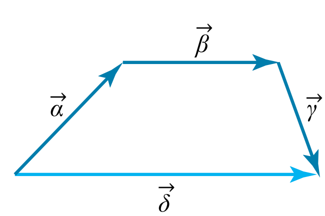
Το άθροισμα των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$ είναι το διάνυσμα $\vec{\delta}$ που έχει αρχή την αρχή του πρώτου και πέρας το πέρας του τελευταίου (σχ. 7.10).

Ιδιότητες πρόσθεσης διανυσμάτων

1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (αντιμεταθετική ιδιότητα)



Σχ. 7.9



Σχ. 7.10

2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{\alpha}$ (μηδενικό στοιχείο)
4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=\vec{0}$ (αντίθετο στοιχείο)

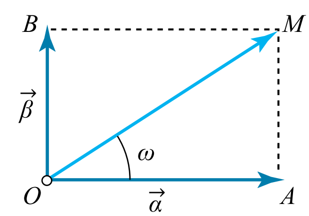
– Ειδικές περιπτώσεις στην πρόσθεση

1) Άθροισμα κάθετων διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$ (σχ. 7.11), υπολογίζουμε το μέτρο του αθροίσματος με το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο OAM:

$$(OM)^2=(OA)^2+(AM)^2 \Leftrightarrow \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$\boxed{\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\sqrt{\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2}}$$



Σχ. 7.11

Για τη διεύθυνση, στο ορθογώνιο τρίγωνο OAM:

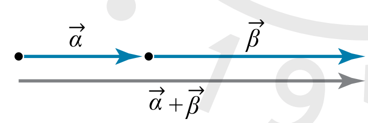
$$\boxed{\varepsilon\varphi\omega=\frac{(AM)}{(OA)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\omega=\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{\left|\vec{\alpha}\right|}}$$

2) Άθροισμα συγγραμμικών διανυσμάτων:

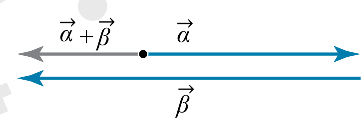
Στην περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ομόρροπα ή αντίρροπα, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ μόνο με την μέθοδο των διαδοχικών διανυσμάτων:

α) Το άθροισμα δύο ***ομόρροπων*** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.12) είναι ένα διάνυσμα:
- Με διεύθυνση και φορά αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Με μέτρο το άθροισμα των μέτρων τους: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|$.

β) Το άθροισμα 2 ***αντίρροπων*** διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ (σχ. 7.13) είναι ένα διάνυσμα:
- Με διεύθυνση αυτή των δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
- Με φορά τη φορά αυτού με το μεγαλύτερο μέτρο.
- Με μέτρο την απόλυτη τιμή της διαφοράς των μέτρων τους: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|$.



Σχ. 7.12



Σχ. 7.13

Εφαρμογή

Να βρεθεί η συνισταμένη $\overrightarrow{\Sigma F}$ των δυνάμεων $\vec{F_1}=6N$ και $\vec{F_2}=8N$ στις παρακάτω περιπτώσεις:

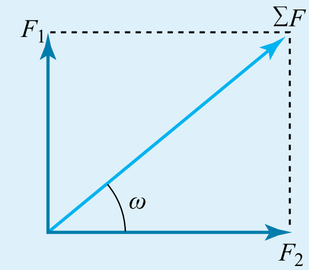
α) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ ομόρροπες.
β) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ αντίρροπες.
γ) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ κάθετες.
δ) $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$ σχηματίζουν γωνία 50°.

Λύση

α) Μέτρο: $\left|\overrightarrow{\Sigma F}\right|=\left|\vec{F_1}+\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_1}\right|+\left|\vec{F_2}\right|=6+8=14N$ και έχει διεύθυνση και φορά ίδια με τις δυνάμεις $\vec{F_1}$ και $\vec{F_2}$.

β) Μέτρο: $\left|\Sigma\vec{F}\right| = \left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right| = \left|\left|\vec{F}_1\right| - \left|\vec{F}_2\right|\right| = 8 - 6 = 2N$

Κατεύθυνση: της $\vec{F}_2$

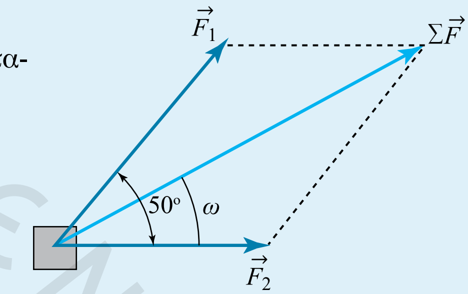


Σχ. 7.14

γ) Όταν $\vec{F}_1 \perp \vec{F}_2$ (σχ. 7.14) για την συνισταμένη έχουμε:

Μέτρο: $\left|\Sigma\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10N$

Κατεύθυνση: $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\left|\vec{F}_1\right|}{\left|\vec{F}_2\right|} = \dfrac{6}{8} = 0,75.$ Άρα $\omega = \varepsilon\varphi^{-1}0,75 = 36,86^{\text{o}}$



Σχ. 7.15

δ) Όταν οι $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ σχηματίζουν γωνία 50^{o} (σχ. 7.15) για τη συνισταμένη του ισχύει:

Μέτρο: $\left|\Sigma\vec{F}\right| = \sqrt{\left|\vec{F}_1\right|^2 + \left|\vec{F}_2\right|^2 + 2\left|\vec{F}_1\right| \cdot \left|\vec{F}_2\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \Leftrightarrow$

$\left|\Sigma\vec{F}\right| = \sqrt{6^2 + 8^2 + 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sigma\upsilon\nu 50} \Leftrightarrow$

$\left|\Sigma\vec{F}\right| = 12,716N$

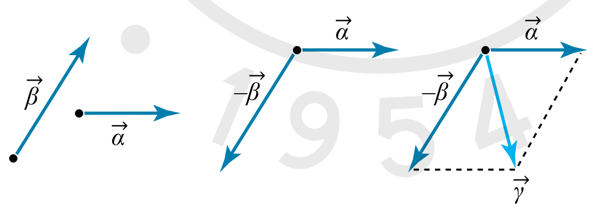
Και για τη διεύθυνση: $\eta\mu\omega = \dfrac{\left|\vec{F}_1\right|}{\left|\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right|} \cdot \eta\mu\varphi = \dfrac{6}{12,716}\eta\mu 50^{\text{o}} = 0,36146$

Άρα $\omega = \eta\mu^{-1}0,36146 = 21,18999^{\text{o}}$

7.2.2 Αφαίρεση διανυσμάτων

Η διαφορά του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$ (σχ. 7.16), δηλαδή:

$$\vec{\alpha} - \vec{\beta} = \vec{\alpha} + (-\vec{\beta})$$



Σχ. 7.16

7.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού επί διάνυσμα

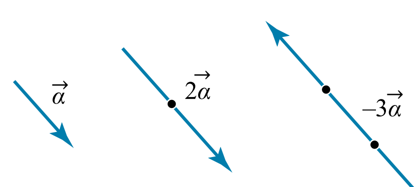
Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός διάφορος του 0 και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και το συμβολίζουμε με $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1) Είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$, και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και

2) έχει μέτρο $|\lambda| \cdot |\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda\vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Για παράδειγμα το διάνυσμα $2\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα ομόρροπο του $\vec{\alpha}$ με διπλάσιο μέτρο του $\vec{\alpha}$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα αντίρροπο του $\vec{\alpha}$ με τριπλάσιο μέτρο του $\vec{\alpha}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 7.17.



Σχ. 7.17

Ιδιότητες πολλαπλασιασμού αριθμού επί διάνυσμα

1) $\lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$

2) $(\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$

3) $\lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$

4) $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$

5) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$ και $\lambda \neq \vec{0}$ τότε $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$.

6) Αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$, τότε $\lambda = \mu$.

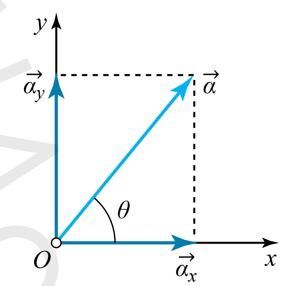
Ας θεωρήσουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Κάθε διάνυσμα της μορφής $\kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, ονομάζεται ***γραμμικός συνδυασμός*** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{u} = 2\vec{\alpha} + 5\vec{\beta}$ και $\vec{\nu} = 3\vec{\alpha} - 4\vec{\beta}$ είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

7.4 Ανάλυση διανύσματος σε δύο κάθετες συνιστώσες

Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ στο επίπεδο Oxy. Αναζητούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha_x}$ και $\vec{\alpha_y}$ στους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα, ώστε το $\vec{\alpha}$ να είναι άθροισμα των δύο διανυσμάτων (βλ. σχ. 7.18). Τα διανύσματα $\vec{\alpha_x}$ και $\vec{\alpha_y}$ ονομάζονται ***διανυσματικές συνιστώσες*** του $\vec{\alpha}$. Δηλαδή ισχύει:

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha_x} + \vec{\alpha_y}$$



Σχ. 7.18

Υπολογισμός των μέτρων των συνιστωσών:

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει:

$$\eta\mu\theta = \frac{|\vec{\alpha_y}|}{|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow |\vec{\alpha_y}| = |\vec{\alpha}| \cdot \eta\mu\theta$$

$$\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{|\vec{\alpha_x}|}{|\vec{\alpha}|} \Leftrightarrow |\vec{\alpha_x}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta$$

Άρα:

$$\boxed{|\vec{\alpha_y}| = |\vec{\alpha}| \cdot \eta\mu\theta}$$

$$\boxed{|\vec{\alpha_x}| = |\vec{\alpha}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta}$$

Παράδειγμα 7.1

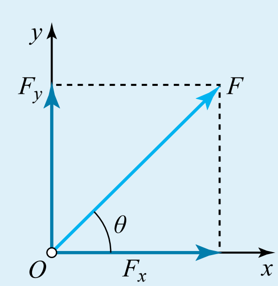
Το διάνυσμα $\vec{F}$ του σχήματος 7.19 έχει μέτρο 100 και σχηματίζει με την οριζόντια διεύθυνση γωνία $\theta = 50^{o}$. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες συνιστώσες.

Λύση

Τα μέτρα των συνιστωσών $\vec{F_x}$ και $\vec{F_y}$ είναι:

$$|\vec{F_y}| = |\vec{F}| \cdot \eta\mu\theta = 100 \cdot \eta\mu 50^{o} = 100 \cdot 0,766 = 76,6$$

$$|\vec{F_x}| = |\vec{F}| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 100 \cdot \sigma\upsilon\nu 50^{o} = 100 \cdot 0,643 = 64,3$$



Σχ. 7.19

– Πρόσθεση περισσότερων από δύο διανυσμάτων με διαφορετική διεύθυνση

Για να προσθέσουμε μη συγγραμμικά διανύσματα, σύμφωνα με αυτά που έχουμε ήδη δει, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα της πρόσθεσης διανυσμάτων, δηλαδή να τα κάνουμε διαδοχικά και να ενώσουμε την αρχή του πρώτου με το τέλος του τελευταίου. Μπορούμε όμως και να ακολουθήσουμε την ακόλουθη διαδικασία, η οποία είναι πιο ακριβής.

1) Κατασκευάζουμε δύο κάθετους άξονες $x'x$ και $y'y$. Η επιλογή των αξόνων είναι αυθαίρετη. Γίνεται με στόχο όσο το δυνατό περισσότερα διανύσματα να συμπίπτουν με τους άξονες.

2) Αναλύουμε όσα διανύσματα είναι εκτός των αξόνων, σε κάθετες συνιστώσες πάνω στους άξονες.

3) Βρίσκουμε τις συνισταμένες των διανυσμάτων σε κάθε άξονα, $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$.

4) Βρίσκουμε τη συνισταμένη $\vec{\sigma_{o\lambda}}$ των διανυσμάτων $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$, εφαρμόζοντας τους τύπους για τη συνισταμένη δύο κάθετων διανυσμάτων. Δηλαδή:

$$\left|\vec{\sigma_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{\sigma_x}\right|^2 + \left|\vec{\sigma_y}\right|^2} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\vec{\sigma_y}\right|}{\left|\vec{\sigma_x}\right|}$$

Παράδειγμα 7.2

Να υπολογιστεί η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{b}$ και $\vec{c}$ του σχήματος 7.20, αν $|\vec{\alpha}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$ και $|\vec{c}| = 8$.

Λύση

Επιλέγουμε άξονες $x'x$ και $y'y$ τους φορείς των διανυσμάτων.

Αναλύουμε το $\vec{\alpha}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{\alpha_x}$ και $\vec{\alpha_y}$ (σχ. 7.21).

$$\left|\vec{\alpha_x}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 6 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^{\circ} = 6 \cdot 0{,}5 = 3$$

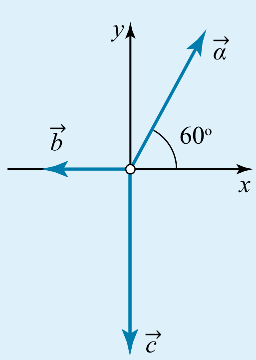
$$\left|\vec{\alpha_y}\right| = \left|\vec{\alpha}\right| \cdot \eta\mu\theta = 6 \cdot \eta\mu 60^{\circ} = 6 \cdot 0{,}866 = 5{,}196$$

Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $x'x$ έχει μέτρο: $\left|\vec{\sigma_x}\right| = \left|\vec{b}\right| - \left|\vec{\alpha_x}\right| = 4 - 3 = 1$ και φορά τη φορά του $\vec{b}$.

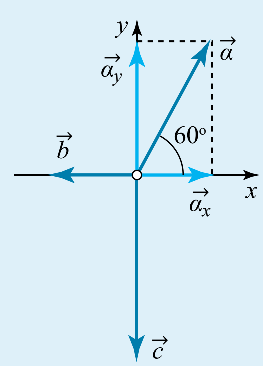
Η συνισταμένη δυνάμεων του άξονα $y'y$ έχει μέτρο: $\left|\vec{\sigma_y}\right| = \left|\vec{c}\right| - \left|\vec{\alpha_y}\right| = 8 - 5{,}196 = 2{,}804$ και φορά τη φορά του $\vec{c}$.

Η συνισταμένη των $\vec{\sigma_x}$ και $\vec{\sigma_y}$ (σχ. 7.22) έχει μέτρο:

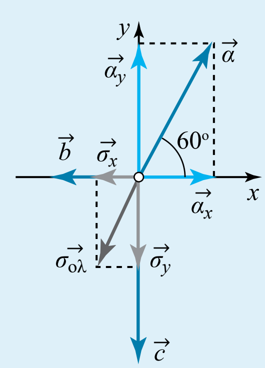
$$\left|\vec{\sigma_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{\sigma_x}\right|^2 + \left|\vec{\sigma_y}\right|^2} = \sqrt{1^2 + 2{,}804^2} = 2{,}977$$



Σχ. 7.20



Σχ. 7.21

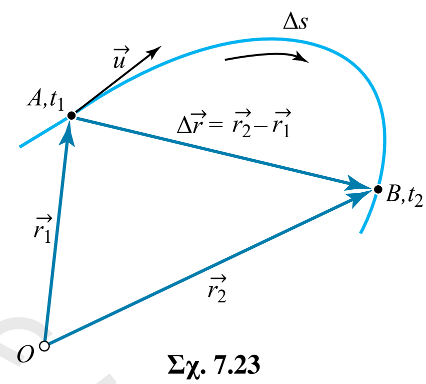


Σχ. 7.22

και διεύθυνση: $$\varepsilon\varphi\omega = \frac{|\vec{\sigma_y}|}{|\vec{\sigma_x}|} = \frac{2,804}{1} = 2,804$$

Άρα $\hat{\omega} = \varepsilon\varphi^{-1} 2,804 = 70,372^o$.

7.5 Εφαρμογές διανυσμάτων στην επίλυση προβλημάτων



Σχ. 7.23

Πριν την επίλυση προβλημάτων θα ορίσουμε κάποια σημαντικά μεγέθη της Φυσικής:

Έστω κινητό που κινείται σε κάποια τροχιά και τη χρονική στιγμή t_1 βρίσκεται στη θέση Α, ενώ μετά από χρόνο Δt, δηλαδή τη χρονική στιγμή t_2, βρίσκεται στη θέση Β (σχ. 7.23).

Μετατόπιση $\vec{\Delta r}$ ονομάζεται το διάνυσμα που έχει αρχή την αρχική θέση Α ενός σώματος και πέρας την τελική θέση Β. Ισχύει:

$$\vec{\Delta r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

Όπου $\vec{r_2}, \vec{r_1}$ τα διανύσματα θέσης του σώματος στην τελική και στην αρχική θέση αντίστοιχα.

Μέση διανυσματική ταχύτητα ορίζεται το φυσικό διανυσματικό μέγεθος:

$$\vec{v} = \frac{\vec{\Delta r}}{\Delta t}$$

Δηλαδή, η μέση διανυσματική ταχύτητα είναι ένα διάνυσμα που έχει διεύθυνση και φορά τη διεύθυνση και φορά της μετατόπισης και μέτρο ίσο με το πηλίκο του μέτρου της μετατόπισης προς το χρονικό διάστημα στο οποίο πραγματοποιήθηκε η μετατόπιση.

Μέση επιτάχυνση ενός κινητού ονομάζεται το διανυσματικό μέγεθος που ορίζεται ως το πηλίκο της μεταβολής της ταχύτητας $\vec{\Delta v}$ προς το χρονικό διάστημα Δt:

$$\vec{a} = \frac{\vec{\Delta v}}{\Delta t}$$

Η διεύθυνση και η φορά της επιτάχυνσης συμπίπτουν με τη διεύθυνση και τη φορά της $\vec{\Delta v}$.

– Σύνθεση ταχυτήτων

Εάν ένα σώμα A κινείται ως προς ένα σώμα B με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\frac{A}{B}}$ και το σώμα B κινείται ως προς ένα σώμα Γ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\frac{B}{\Gamma}}$, αποδεικνύεται (από τον ορισμό της στιγμιαίας ταχύτητας) ότι το σώμα A κινείται ως προς το Γ με ταχύτητα $\vec{\upsilon}_{\frac{A}{\Gamma}}$:

$$\vec{\upsilon}_{\frac{A}{\Gamma}} = \vec{\upsilon}_{\frac{A}{B}} + \vec{\upsilon}_{\frac{B}{\Gamma}}$$

Πρόβλημα 7.1

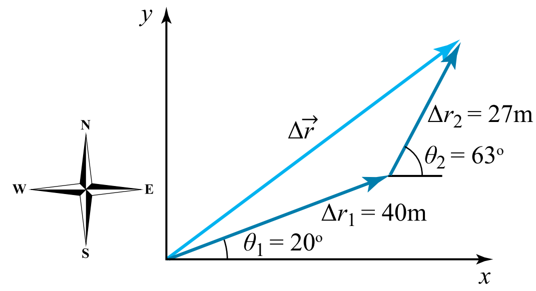
Πλοίο πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N\ 70^o\ E$ και διανύει απόσταση 40 m. Στη συνέχεια, αλλάζοντας πορεία, πλέει ευθύγραμμα με πορεία $N\ 27^o\ E$ και διανύει απόσταση 27 m.

Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της μετατόπισης $\overrightarrow{\Delta r}$ και η γωνία που σχηματίζει με τον Βορρά.

Λύση

Σχεδιάζουμε τα διαδοχικά διανύσματα, παίρνοντας κλίμακα 1 cm → 10 m (σχ. 7.24)

Ενώνουμε την αρχή του πρώτου με το πέρας του δεύτερου. Με τον χάρακα μετράμε το μήκος του $\overrightarrow{\Delta r}$. Είναι 6,5 cm. Επομένως, σύμφωνα με την κλίμακα που πήραμε, το μέτρο της μετατόπισης είναι 65 m. Επίσης με το μοιρογνωμόνιο μετράμε τη γωνία που σχηματίζει το $\overrightarrow{\Delta r}$ με τον Βορρά και είναι 53°.



Σχ. 7.24

Πρόβλημα 7.2

Ένα πλοίο αναχωρεί από το λιμάνι και πλέει 20 ν.μ. προς τον Βορρά. Στη συνέχεια κατευθύνεται 60° νοτιοανατολικά για 40 ν.μ. Βρείτε την τελική του μετατόπιση από το λιμάνι.

Λύση

Η τελική μετατόπιση είναι η συνισταμένη των διανυσμάτων $\vec{r_1}$ και $\vec{r_2}$ του σχήματος 7.25.

Αναλύουμε το διάνυσμα $\vec{r_2}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες:

$$\left|\vec{r_{2x}}\right| = \left|\vec{r_2}\right| \cdot \sigma\upsilon\nu\theta = 40 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o = 20$$

$$\left|\vec{r_{2y}}\right| = \left|\vec{r_2}\right| \cdot \eta\mu\theta = 40 \cdot \eta\mu 60^o = 34,64$$

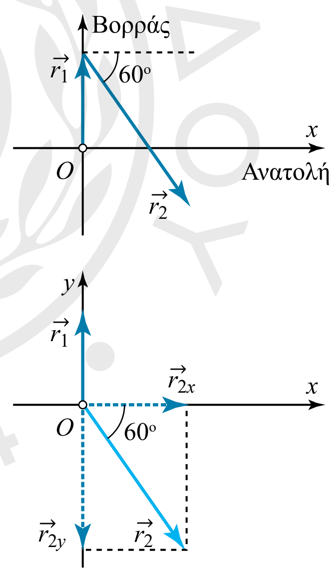
$$\left|\vec{r_y}\right| = \left|\vec{r_{2y}}\right| - \left|\vec{r_1}\right| = 34,64 - 20 = 14,64$$

Η συνισταμένη των $\vec{r_{2x}}$ και $\vec{r_y}$ έχει μέτρο:

$$\left|\vec{r_{o\lambda}}\right| = \sqrt{\left|\vec{r_{2x}}\right|^2 + \left|\vec{r_y}\right|^2} = \sqrt{20^2 + 14,64^2} = 24,79$$

Και η διεύθυνση:

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\left|\vec{r_y}\right|}{\left|\vec{r_{2x}}\right|} = \frac{14,64}{20} = 0,732$$



Σχ. 7.25

Πρόβλημα 7.3

Πλοίο κινείται με ταχύτητα $v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o} = 14$ knots και πορεία 0° (προς Βορρά) και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha} = 6$ knots και κατεύθυνση προς Δύση. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).

Λύση

Ισχύει ότι:

$$\overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} = \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}} + \overrightarrow{v_{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{v_{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} = \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha}^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}} - \overrightarrow{v_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}}^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}}$$

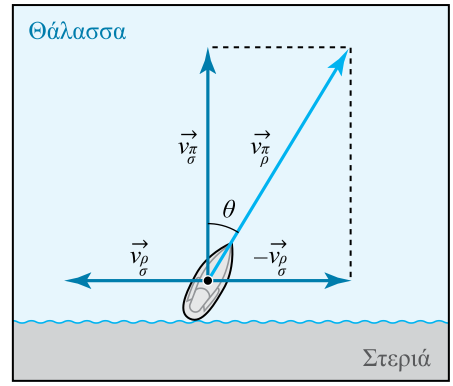
Η αντισταθμιστική ταχύτητα του πλοίου είναι το μέτρο του $\vec{v}^{\pi}_{\varrho}$ του σχήματος 7.26:

$$\left|\vec{v}^{\pi}_{\varrho}\right| = \sqrt{\left|\vec{v}^{\pi}_{\sigma}\right|^2 + \left|-\vec{v}^{\varrho}_{\sigma}\right|^2} = \sqrt{14^2 + 6^2} = 15,23 \text{ knots}$$

Για τη γωνία από το ορθογώνιο τρίγωνο:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{\left|\vec{v}^{\varrho}_{\sigma}\right|}{\left|\vec{v}^{\pi}_{\sigma}\right|} = \frac{6}{14} = 0,429 \cdot$$

Άρα $\theta = \varepsilon\varphi^{-1}0,429 = 23,22^{\circ}$.



Σχ. 7.26

Ασκήσεις

1. Να αποδειχθούν οι ιδιότητες της πρόσθεσης των διανυσμάτων.

2. Να υπολογιστεί γραφικά το μέτρο της συνισταμένης δύναμης του σχήματος 7.27 και η γωνία της με την οριζόντια διεύθυνση.

3. Σε ένα σώμα ασκούνται οι ομόρροπες δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ και οι αντίρροπες με αυτές δυνάμεις $\vec{F_3}$ και $\vec{F_4}$. Τα μέτρα των δυνάμεων είναι $|\vec{F_1}| = 5\,N$, $|\vec{F_2}| = 7\,N$, $|\vec{F_3}| = 3\,N$ και $|\vec{F_4}| = 4\,N$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.

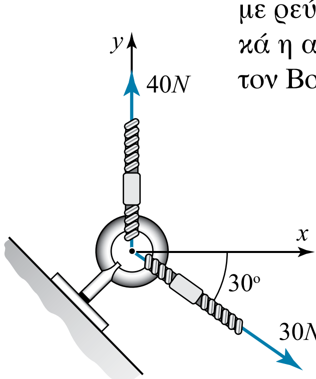
4. Ένα σώμα δέχεται τις δυνάμεις $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ που είναι κάθετες μεταξύ τους και έχουν μέτρα $|\vec{F_1}| = 12\,N$ και $|\vec{F_2}| = 5\,N$. Να προσδιοριστεί η συνισταμένη τους.

5. Στο σώμα Σ του σχήματος 7.28 ασκείται μια δύναμη με μέτρο $|\vec{F_1}| = 5\,N$ που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^{\circ}$ με την οριζόντια διεύθυνση. Να αναλυθεί σε δύο κάθετες μεταξύ τους συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφη.

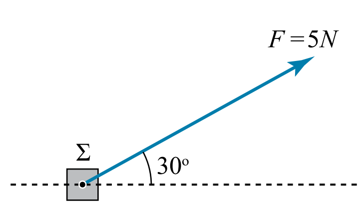
6. Να υπολογιστεί η συνισταμένη των δυνάμεων του σχήματος 7.29, αν $|\vec{F_1}| = 10N$, $|\vec{F_2}| = 5N$, $|\vec{F_3}| = 6\,N$, $\varphi = 60^{\circ}$ και $\theta = 30^{\circ}$.

7. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}} = 12$ knots και πορεία προς Βορρά και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $\upsilon^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}} = 4$ knots και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).

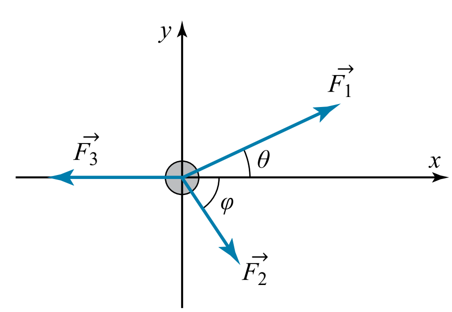
8. Πλοίο κινείται με ταχύτητα $\upsilon^{\pi\lambda o\acute{\iota}o}_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\alpha} = 12$ knots και πορεία $N60^{\circ}E$ και εισέρχεται σε περιοχή με ρεύμα ταχύτητας $\upsilon^{\rho\varepsilon\acute{\upsilon}\mu\alpha}_{\sigma\tau\varepsilon\rho\iota\acute{\alpha}} = 10$ knots και κατεύθυνση προς Νότο. Να υπολογιστεί γραφικά η αντισταθμιστική στο ρεύμα ταχύτητα του πλοίου (το μέτρο της και η γωνία της με τον Βορρά).



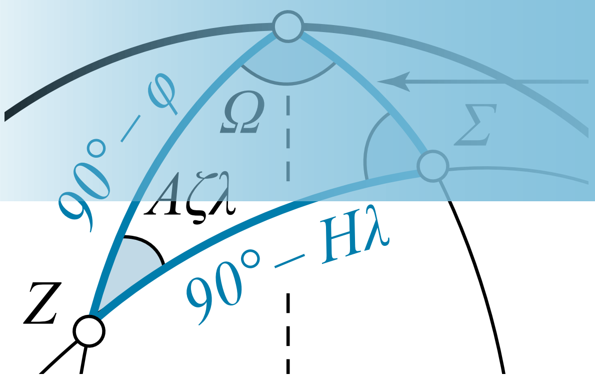
Σχ. 7.27



Σχ. 7.28



Σχ. 7.29



κεφάλαιο **8**

Σφαιρικά τρίγωνα

8.1 Σφαίρα

Σφαίρα ονομάζεται το σύνολο των σημείων του χώρου που ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο Ο. Το σημείο Ο είναι το κέντρο της σφαίρας και η σταθερή απόσταση R των σημείων από το Ο λέγεται ***ακτίνα***. Η σφαίρα συμβολίζεται με (Ο, *R*).

Έστω ότι μια ευθεία ε που διέρχεται από το κέντρο του κύκλου (Ο, *R*) τέμνει την σφαίρα στα σημεία Α και Α΄. Τα σημεία Α και Α΄ λέγονται ***αντιδιαμετρικά σημεία***. Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΑ΄ ονομάζεται ***διάμετρος*** της σφαίρας. Κάθε διάμετρος της σφαίρας έχει μήκος 2*R*. Το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ που ενώνει τα 2 σημεία Β και Γ της σφαίρας ονομάζεται ***χορδή*** (σχ. 8.1).

8.1.1 Κύκλοι σφαίρας

Μέγιστος κύκλος σφαίρας ονομάζεται ένας κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που διέρχεται από το κέντρο της. Ένας μέγιστος κύκλος έχει κέντρο το κέντρο της σφαίρας και ακτίνα την ακτίνα της σφαίρας (σχ. 8.2).

Μικρός κύκλος σφαίρας ονομάζεται κάθε κύκλος που προκύπτει από την τομή της σφαίρας με επίπεδο που δεν διέρχεται από το κέντρο της (σχ. 8.2).

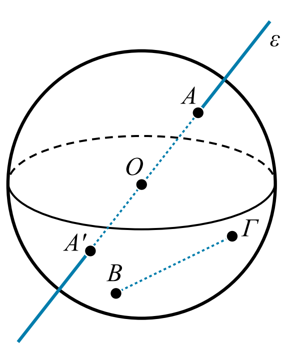
Από δύο τυχαία, μη αντιδιαμετρικά σημεία, μιας σφαίρας περνούν άπειροι μικροί κύκλοι, αλλά μόνο ένας μέγιστος (σχ. 8.3). Αν τα σημεία είναι αντιδιαμετρικά, περνούν άπειροι μέγιστοι κύκλοι. Φανταστείτε τους δύο πόλους της υδρογείου από τους οποίους διέρχονται άπειροι μεσημβρινοί. Η συντομότερη διαδρομή μεταξύ δύο σημείων της σφαίρας είναι το τόξο του μέγιστου κύκλου που διέρχεται απ' αυτά.

Απόσταση δύο σημείων Α και Β πάνω στη σφαίρα ονομάζεται το μικρότερο από τα δύο τόξα του μέγιστου κύκλου που διέρχεται από αυτά τα σημεία. Η απόσταση αυτή είναι ίση με την επίκεντρη γωνία ΑΟΒ (σχ. 8.3).

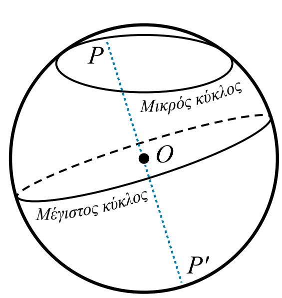
8.1.2 Άξονας και πόλοι κύκλου

Η ευθεία που διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας και είναι κάθετη στο επίπεδο ενός κύκλου ονομάζεται ***άξονας του κύκλου***.

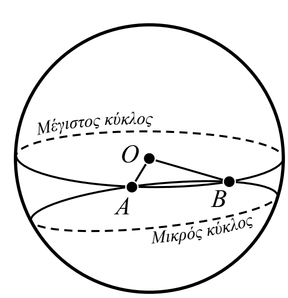
Τα σημεία που τέμνει ο άξονας ενός κύκλου την σφαίρα ονομάζονται ***πόλοι*** του κύκλου.



Σχ. 8.1



Σχ. 8.2



Σχ. 8.3

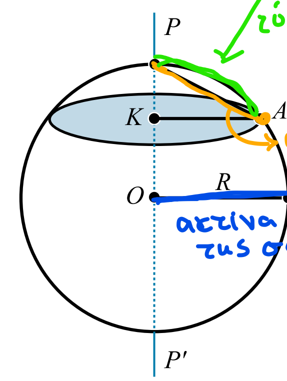
Σφαιρική Ακτίνα

Έτσι, στο σχήμα 8.4 τα σημεία P και P' είναι πόλοι του κύκλου (Κ, ΚΑ) και η ευθεία PP' είναι ο άξονάς του.

Ο μέγιστος κύκλος που είναι κάθετος στη διάμετρο PP', ονομάζεται ***ισημερινός κύκλος*** του σημείου P.

Η απόσταση κάθε σημείου ενός κύκλου της σφαίρας από τον πλησιέστερο πόλο του κύκλου ονομάζεται ***πολική απόσταση*** του κύκλου.

Το τόξο του μέγιστου κύκλου της σφαίρας που συνδέει τον πόλο του κύκλου με ένα τυχαίο σημείο του κύκλου ονομάζεται ***σφαιρική ακτίνα*** του κύκλου. Στο σχήμα 8.4, το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος PA είναι η πολική απόσταση του κύκλου (Κ, ΚΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{PA}$ είναι η σφαιρική ακτίνα του.

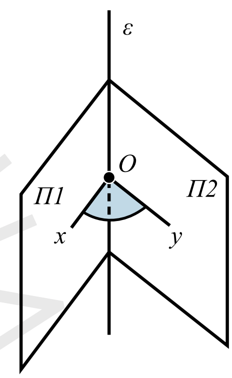


Σχ. 8.4

8.1.3 Γωνίες στον χώρο

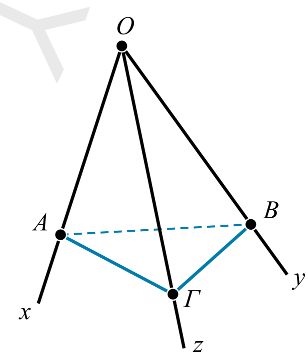
Δίεδρη γωνία ονομάζεται το σχήμα που αποτελείται από δύο ημιεπίπεδα, Π1 και Π2, που τέμνονται σε ευθεία ε, και τη συμβολίζουμε με ε(Π1, Π2) (σχ. 8.5). Τα ημιεπίπεδα Π1 και Π2 λέγονται ***έδρες*** της δίεδρης γωνίας και η κοινή ευθεία ε λέγεται ***ακμή*** της δίεδρης γωνίας.

Ορίζουμε ως ***μέτρο*** της δίεδρης γωνίας ε(Π1, Π2) το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\hat{O}y$, όπου Ox, Oy οι ημιευθείες που περιέχονται στα επίπεδα Π1 και Π2 αντίστοιχα και είναι κάθετες στην ακμή της δίεδρης γωνίας στο σημείο Ο.



Σχ. 8.5

Τρίεδρη γωνία λέγεται το σχήμα που καθορίζεται από τρεις ημιευθείες Ox, Oy και Oz, με κοινή αρχή Ο, οι οποίες δεν είναι συνεπίπεδες. Το σημείο Ο λέγεται ***κορυφή*** της τρίεδρης γωνίας, και οι ημιευθείες Ox, Oy και Oz λέγονται ***ακμές*** της τρίεδρης γωνίας. Αν Α, Β και Γ είναι τρία σημεία στις ακμές της τρίεδρης γωνίας, οι γωνίες ΑÔΒ, ΒÔΓ και ΓÔΑ λέγονται ***έδρες***. Η τρίεδρη γωνία του σχήματος 8.6 συμβολίζεται με Ο.ΑΒΓ.



Σχ. 8.6

8.1.4 Σφαιρική γωνία

Σφαιρική γωνία ονομάζεται το μέρος της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ δύο τεμνόμενων τόξων τα οποία ανήκουν σε μέγιστους κύκλους. Τα τόξα αυτά ονομάζονται ***πλευρές*** της γωνίας, και το σημείο τομής τους ονομάζεται ***κορυφή*** της γωνίας [σχ. 8.7(α)]. Η σφαιρική γωνία του σχήματος 8.7 έχει κορυφή το σημείο Α και πλευρές τα τόξα $\widehat{AB}$ και $\widehat{A\Gamma}$. Οι μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και στο αντιδιαμετρικό σημείο του Α, το Α΄ [σχ. 8.7(β)].

Ορίζουμε ως μέτρο της σφαιρικής γωνίας με κορυφή το σημείο Α, το μέτρο της επίπεδης γωνίας $x\widehat{A}y$, όπου Ax, Ay οι εφαπτομένες των πλευρών της γωνίας στην κορυφή A [σχ. 8.7(γ)].

Προφανώς, εξ ορισμού, όπου και να είναι οι θέσεις των σημείων Β και Γ πάνω στους δύο μέγιστους κύκλους, οι αντίστοιχες σφαιρικές γωνίες που σχηματίζονται έχουν όλες το ίδιο μέτρο.

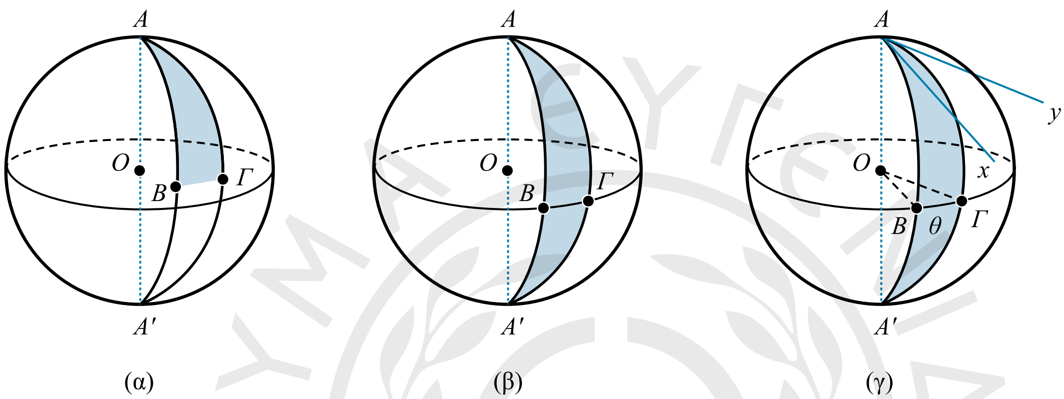
– Ιδιότητες σφαιρικής γωνίας

1) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο της δίεδρης γωνίας την οποία σχηματίζουν τα επίπεδα που περιέχουν τις πλευρές της. Στο σχήμα 8.7 η δίεδρη γωνία έχει ακμή τη διάμετρο AA' και έδρες τα δύο ημιεπίπεδα που περιέχουν τα τόξα $\widehat{ABA'}$ και $\widehat{AB\Gamma'}$ αντίστοιχα.

2) Το μέτρο της σφαιρικής γωνίας είναι ίσο με το μέτρο του τόξου του ισημερινού κύκλου της κορυφής, το οποίο περιέχεται μεταξύ των πλευρών της. Το μέτρο αυτού του τόξου είναι ίσο με την επίκεντρη γωνία του ισημερινού κύκλου, η οποία βαίνει σε αυτό [σχ. 8.7(γ)].

Επομένως ισχύει:

$$x\widehat{A}y = \widehat{B\Gamma} = \widehat{BO\Gamma} = \theta$$



Σχ. 8.7

8.2 Σφαιρικό τρίγωνο

Σφαιρικό τρίγωνο ονομάζεται το μέρος της επιφάνειας της σφαίρας που περικλείεται μεταξύ των τόξων τριων μέγιστων κύκλων μικρότερων του ημικυκλίου, τα οποία δεν διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Στο σχήμα 8.8 τρεις μέγιστοι κύκλοι τέμνονται και σχηματίζεται το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ. Τα σημεία τομής *Α, Β, Γ* των μέγιστων κύκλων ονομάζονται ***κορυφές του σφαιρικού τριγώνου***.

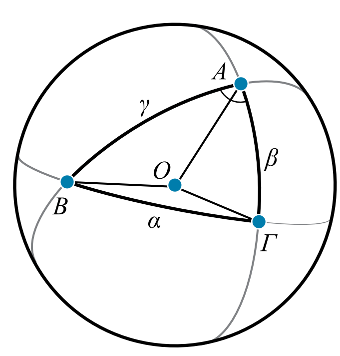
Αν ενώσουμε το κέντρο Ο της σφαίρας με τις κορυφές *Α, Β, Γ,* σχηματίζεται η τρίεδρη γωνία Ο.ΑΒΓ. Λέμε ότι στην τρίεδρη αυτή γωνία αντιστοιχεί το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ.

– Κύρια στοιχεία σφαιρικού τριγώνου

1) Τα τόξα των τριών μέγιστων κύκλων ονομάζονται ***πλευρές*** του σφαιρικού τριγώνου. Οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου του σχήματος 8.8 είναι τα τόξα $\widehat{AB}$, $\widehat{B\Gamma}$, $\widehat{\Gamma A}$ και συμβολίζονται και με μικρά γράμματα $\boldsymbol{\gamma}$, $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ αντίστοιχα. Κάθε πλευρά είναι τόξο μικρότερο του ημικυκλίου, δηλαδή είναι μικρότερη από 180°. Το ***μέτρο της πλευράς*** είναι το μέτρο της επίκεντρης γωνίας που βαίνει σε αυτό. Δηλαδή:

$$B\hat{O}\Gamma = \alpha \quad A\hat{O}\Gamma = \beta \quad A\hat{O}B = \gamma$$

2) Οι γωνίες που σχηματίζουν ανά δύο οι τρεις μέγιστοι κύκλοι ονομάζονται ***γωνίες του σφαιρικού τριγώνου***, συμβολίζονται με ***Α***, ***Β***, ***Γ*** και έχουν το ίδιο μέτρο με τις δίεδρες γωνίες *Α, Β, Γ* αντίστοιχα. Ισοδύναμα, οι γωνίες *Α, Β* και *Γ* του σφαιρικού τριγώνου είναι οι επίπεδες γωνίες που σχηματίζουν οι εφαπτόμενες των μέγιστων κύκλων σε κάθε



Σχ. 8.8

κορυφή του σφαιρικού τριγώνου. Θυμηθείτε το σχήμα 8.7(γ). Προφανώς κάθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180°.

Οι 3 γωνίες και οι 3 πλευρές ονομάζονται ***κύρια στοιχεία*** του σφαιρικού τριγώνου, και μετριούνται ή όλα σε μοίρες ή όλα σε rad. Το σφαιρικό τρίγωνο έχει πολλές εφαρμογές στη Ναυτιλία, με κυριότερες το τρίγωνο θέσης και το τρίγωνο ορθοδρομίας που θα δούμε παρακάτω. Οι Πλοίαρχοι στις εφαρμογές του σφαιρικού τριγώνου, δουλεύουν αποκλειστικά με μοίρες, γι' αυτό και σε όλα τα παραδείγματα αυτού του κεφαλαίου χρησιμοποιούμε ως μονάδα μέτρησης των γωνιών και των πλευρών τη μοίρα και τις υποδιαιρέσεις της.

Παρατηρήσεις

1) Ένα οποιοδήποτε τρίγωνο στην επιφάνεια μιας σφαίρας δεν είναι απαραίτητα σφαιρικό τριγωνο. Σύμφωνα με τον ορισμό, οι πλευρές του σφαιρικού τριγώνου είναι τόξα μέγιστων κύκλων. Αν μια πλευρά του τριγώνου είναι τόξο μικρού κύκλου, τότε δεν πρόκειται για σφαιρικό τρίγωνο.

2) Δεν πρέπει να συγχέουμε το μέτρο της πλευράς με το μήκος της πλευράς. Στο σφαιρικό τρίγωνο, όταν ζητείται να υπολογιστεί μια πλευρά, υπολογίζουμε το μέτρο της σε μοίρες, δηλαδή το γωνιακό μέτρο του αντίστοιχου μέγιστου κύκλου, και όχι το μήκος της (όπως κάνουμε στο επίπεδο τρίγωνο).

8.2.1 Βασικές ιδιότητες σφαιρικού τριγώνου

Ας θεωρήσουμε το σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος 8.8.

1) Καθε πλευρά του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° (αν είναι μετρημένη σε μοίρες).

2) Καθε γωνία του σφαιρικού τριγώνου είναι μικρότερη από 180° (αν είναι μετρημένη σε μοίρες).

3) Αν α, β, γ οι πλευρές σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ σε μοίρες, τότε:

$$\boldsymbol{\alpha + \beta + \gamma < 360^{\circ}}$$

4) Αν Α, Β, Γ οι γωνίες σφαιρικού τριγώνου ΑΒΓ, τότε σε μοίρες θα είναι:

$$\mathbf{180^{\circ}} < \boldsymbol{A + B + \Gamma} < \mathbf{540^{\circ}}$$

5) Απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται ομοίως άνισες γωνίες. Συνεπώς, απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου βρίσκεται η μεγαλύτερη γωνία του και αντίστροφα.

6) Κάθε πλευρά είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

7) Κάθε γωνία αυξημένη κατά 180° είναι μεγαλύτερη από το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{A + 180^{\circ} > B + \Gamma} \ \textbf{(κυκλικά)}$$

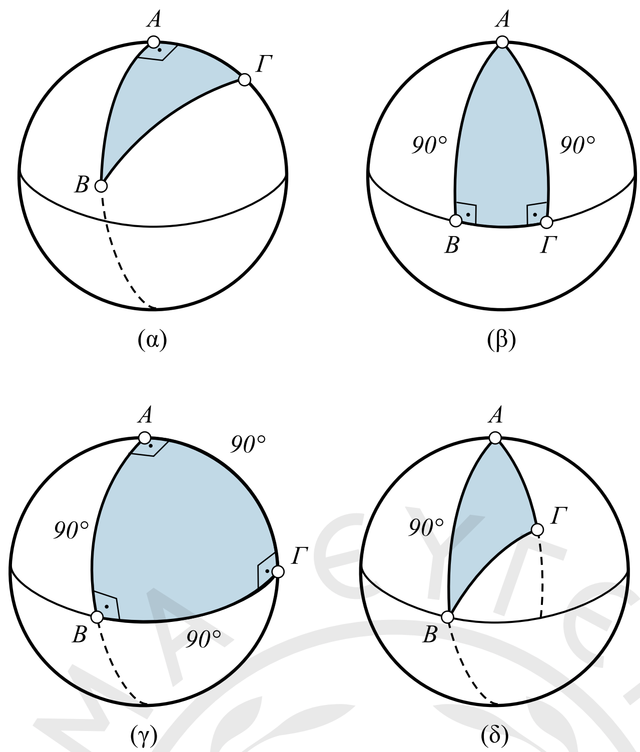
8) Δύο πλευρές σφαιρικού τριγώνου είναι ίσες αν και μόνον αν οι απέναντι προς αυτές τις πλευρές γωνίες είναι ίσες.

8.2.2 Είδη σφαιρικών τριγώνων

Κάθε σφαιρικό τρίγωνο θα ανήκει σε μία ή περισσότερες από τις παρακάτω κατηγορίες ανάλογα με το αν οι γωνίες ή οι πλευρές του έχουν μέτρο 90° ή αν είναι ίσες μεταξύ τους:

1) ***Ορθογώνιο:*** Αν μία γωνία του είναι ίση με 90° [σχ. 8.9(α)].

2) ***Δισορθογώνιο:*** Αν δύο γωνίες του είναι ίσες με 90° [σχ. 8.9(β)].



Σχ. 8.9

3) ***Τρισορθογώνιο:*** Αν και οι τρεις γωνίες του είναι ίσες με 90° [σχ. 8.9(γ)].
4) ***Ορθόπλευρο:*** Αν μία πλευρά του έχει μέτρο 90° [σχ. 8.9(δ)].
5) ***Δισορθόπλευρο:*** Αν δύο πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(β)].
6) ***Τρισορθόπλευρο:*** Αν και οι τρεις πλευρές του έχουν μέτρο 90° [σχ. 8.9(γ)].
7) ***Ισοσκελές:*** Αν δύο πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(β)].
8) ***Ισόπλευρο:*** Αν και οι τρεις πλευρές του είναι ίσες [σχ. 8.9(γ)].
9) ***Σκαληνό:*** Αν όλες οι πλευρές του είναι άνισες.
10) ***Τυχαίο (ή κοινό):*** Δεν έχει αναγκαστικά γωνία ή πλευρά ίση με 90°.

8.2.3 Θεμελιώδεις σχέσεις σε σφαιρικά τρίγωνα

Έστω τυχαίο σφαιρικό τρίγωνο με γωνίες A, B, Γ και πλευρές α, β, γ. Στο $AB\Gamma$ αποδεικνύονται οι παρακάτω θεμελιώδεις σχέσεις:

1) ***Νόμος Συνημιτόνων για τις Πλευρές (Θεμελιώδεις σχέσεις πρώτου είδους)***

$$\text{συν}\,\alpha = \text{συν}\,\beta \cdot \text{συν}\,\gamma + \text{ημ}\,\beta \cdot \text{ημ}\,\gamma \cdot \text{συν}\,A$$
$$\text{συν}\,\beta = \text{συν}\,\alpha \cdot \text{συν}\,\gamma + \text{ημ}\,\alpha \cdot \text{ημ}\,\gamma \cdot \text{συν}\,B$$
$$\text{συν}\,\gamma = \text{συν}\,\alpha \cdot \text{συν}\,\beta + \text{ημ}\,\alpha \cdot \text{ημ}\,\beta \cdot \text{συν}\,\Gamma$$

2) ***Νόμος Συνημιτόνων για τις Γωνίες (Πολικοί τύποι των θεμελιωδών σχέσεων)***

$$\text{συν}\,A = -\text{συν}\,B \cdot \text{συν}\,\Gamma + \text{ημ}\,B \cdot \text{ημ}\,\Gamma \cdot \text{συν}\,\alpha$$
$$\text{συν}\,B = -\text{συν}\,A \cdot \text{συν}\,\Gamma + \text{ημ}\,A \cdot \text{ημ}\,\Gamma \cdot \text{συν}\,\beta$$
$$\text{συν}\,\Gamma = -\text{συν}\,A \cdot \text{συν}\,\Gamma + \text{ημ}\,A \cdot \text{ημ}\,B \cdot \text{συν}\,\gamma$$

3) ***Νόμος Ημιτόνων (Θεμελιώδεις σχέσεις δευτέρου είδους)***

$$\frac{\text{ημ}\,A}{\text{ημ}\,\alpha} = \frac{\text{ημ}\,B}{\text{ημ}\,\beta} = \frac{\text{ημ}\,\Gamma}{\text{ημ}\,\gamma}$$

4) ***Αναλογικοί τύποι Gauss – Delambre***

$$\eta\mu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}}=\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}=\sigma\upsilon\nu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}}=\eta\mu\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B-\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

5) ***Αναλογικοί τύποι του Napier***

$$\varepsilon\varphi\frac{\alpha}{2}=\varepsilon\varphi\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{B+\Gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}=\varepsilon\varphi\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{B+\Gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$\varepsilon\varphi\frac{A}{2}=\sigma\varphi\frac{B-\Gamma}{2}\cdot\frac{\eta\mu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\eta\mu\frac{\beta+\gamma}{2}}=\sigma\varphi\frac{B+\Gamma}{2}\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta-\gamma}{2}}{\sigma\upsilon\nu\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

6) ***Τύποι των τεσσάρων στοιχείων***

$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi A-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi B$$
$$\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi A-\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma\cdot\sigma\varphi B-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\Gamma=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi B-\sigma\varphi\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu A=\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi\beta\cdot\sigma\varphi A$$
$$\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu B=\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\varphi\Gamma-\sigma\varphi\gamma\cdot\sigma\varphi B$$

7) ***Τύποι ημιπαρημιτόνων***

α) ***Γωνιών:***

$$\eta\mu\pi\varrho A=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\varrho B=\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\eta\mu(\tau-\gamma)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\gamma$$
$$\eta\mu\pi\varrho\Gamma=\eta\mu(\tau-\beta)\cdot\eta\mu(\tau-\alpha)\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\beta\cdot\sigma\tau\varepsilon\mu\alpha$$

β) ***Πλευρών:***

$$\eta\mu\pi\varrho\alpha=\eta\mu\pi\varrho(\beta-\gamma)+\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\varrho A$$
$$\eta\mu\pi\varrho\beta=\eta\mu\pi\varrho(\gamma-\alpha)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\gamma\cdot\eta\mu\pi\varrho B$$
$$\eta\mu\pi\varrho\gamma=\eta\mu\pi\varrho(\alpha-\beta)+\eta\mu\alpha\cdot\eta\mu\beta\cdot\eta\mu\pi\varrho\Gamma$$

όπου το $\eta\mu\pi\varrho\ \omega$ είναι το ***ημιπαρημίτονο*** του τόξου ω, το οποίο δίνεται από τον τύπο:

$$\eta\mu\pi\varrho\ \omega=\frac{1-\sigma\upsilon\nu\omega}{2}\quad\text{και}\quad\tau=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}$$

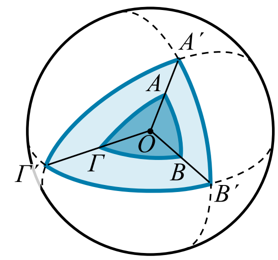
8.2.4 Πολικό τρίγωνο

Έστω σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 8.10). Κάθε πλευρά του ανήκει σε μέγιστο κύκλο, στον οποίο αντιστοιχούν δύο πόλοι. Αν Α΄ είναι ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΒΓ που είναι πλησιέστερος στην κορυφή Α του σφαιρικού τριγώνου, Β΄ ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΑΓ που είναι πλησιεστερος στην κορυφή Β και Γ΄ ο πόλος του μέγιστου κύκλου ΑΒ που είναι πλησιεστερος στην κορυφή Γ, το σφαιρικό τρίγωνο Α΄ Β΄ Γ΄ ονομάζεται ***πολικό τρίγωνο*** του τριγώνου ΑΒΓ. Οι πλευρές του πολικού τριγώνου συμβολίζονται με α΄, β΄, γ΄.

Αποδεικνύεται ότι αν Α΄ Β΄ Γ΄ είναι το πολικό τρίγωνο του ΑΒΓ, τότε και το ΑΒΓ είναι το πολικό τρίγωνο του Α΄ Β΄ Γ΄.

Ιδιότητα: οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού τριγώνου και αντίστροφα:

$$A + \alpha' = B + \beta' = \Gamma + \gamma' = 180^{o}$$
$$A' + \alpha = B' + \beta = \Gamma' + \gamma = 180^{o}$$



Σχ. 8.10

8.3 Επίλυση ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ισχύουν δέκα βασικοί τύποι, με τη βοήθεια των οποίων μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία ενός ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου, αν γνωρίζουμε δύο στοιχεία του πλην της ορθής γωνίας. Ας θεωρήσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με Α = 90^{o}. Οι σχέσεις που ακολουθούν, προκύπτουν από τον Νόμο Συνημιτόνων για τις Πλευρές, τον Νόμο Συνημιτόνων για τις Γωνίες και τον Νόμο Ημιτόνων, της παραγράφου 8.2.3, αν θέσουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^{o} = 1$ και $\sigma\upsilon\nu A = \sigma\upsilon\nu 90^{o} = 0$:

1) (α) $\eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$	1) (β) $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$
2) (α) $\eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma$	2) (β) $\eta\mu\gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi B$
3) (α) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma$	3) (β) $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\varphi B \cdot \sigma\varphi\Gamma$
4) (α) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\upsilon\nu\gamma \cdot \eta\mu B$	4) (β) $\sigma\upsilon\nu\Gamma = \varepsilon\varphi\beta \cdot \sigma\varphi\alpha$
5) (α) $\sigma\upsilon\nu B = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \eta\mu\Gamma$	5) (β) $\sigma\upsilon\nu B = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\alpha$

Ενδεικτικά, θα αποδείξουμε τις σχέσεις 1(α) και 1(β):

Στον Νόμο Ημιτόνων, θέτουμε $\eta\mu A = \eta\mu 90^{o} = 1$, οπότε έχουμε για την 1(α):

$$\frac{\eta\mu\ A}{\eta\mu\ \alpha} = \frac{\eta\mu\ B}{\eta\mu\ \beta} \Leftrightarrow \frac{1}{\eta\mu\ \alpha} = \frac{\eta\mu\ B}{\eta\mu\ \beta} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$$

Για την 1(β) στον Νόμο Συνημιτόνων για γωνίες θέτουμε $\sigma\upsilon\nu A = 0$ και $\eta\mu A = 1$, οπότε έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\ \Gamma = -\sigma\upsilon\nu\ A \cdot \sigma\upsilon\nu\ B + \eta\mu\ A \cdot \eta\mu\ B \cdot \sigma\upsilon\nu\ \gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\ \Gamma = \eta\mu\ B \cdot \sigma\upsilon\nu\ \gamma \qquad (1)$$

Από τον Νόμο Ημιτόνων έχουμε:

$$\frac{\eta\mu\ B}{\eta\mu\ \beta} = \frac{\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ \gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\ B = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ \gamma} \qquad (2)$$

Με αντικατάσταση της (2) στην (1) προκύπτει:

$$\sigma\upsilon\nu\ \Gamma = \eta\mu\beta \cdot \frac{\eta\mu\ \Gamma}{\eta\mu\ \gamma} \cdot \sigma\upsilon\nu\ \gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\eta\mu\ \gamma}{\sigma\upsilon\nu\ \gamma} \cdot \frac{\sigma\upsilon\nu\ \Gamma}{\eta\mu\ \Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \varepsilon\varphi\gamma \cdot \sigma\varphi\Gamma$$

8.3.1 Κανόνες Napier

Επειδή η απομνημόνευση των δέκα παραπάνω τύπων των ορθογώνιων σφαιρικών τριγώνων είναι δύσκολη, ο Napier επινόησε ένα μνημονικό τέχνασμα, με το οποίο μπορούμε να βρίσκουμε οποιονδήποτε από αυτούς και μάλιστα εκείνον ακριβώς που μας χρειάζεται σε κάθε συγκεκριμένη επίλυση. Το τέχνασμα αυτό αποτελείται από δύο κανόνες, οι οποίοι ονομάζονται Κανόνες του Napier. Αρχικά, για να εφαρμόσουμε τους κανόνες του Napier, πρέπει να σχηματίσουμε ένα «νέο» ορθογώνιο τρίγωνο, το οποίο θα προκύψει από το αρχικό, αν στη θέση της υποτείνουσας και των δύο γωνιών εκτός της ορθής, βάλουμε τα συμπληρωματικά τους στοιχεία.

Στην διάταξη του σχήματος 8.11 κάθε στοιχείο έχει δύο προσκείμενα και δύο αντικείμενα στοιχεία, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την ορθή γωνία Α.

1) Για το στοιχείο 90º – Γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90º – α και β και τα αντικείμενα τα 90º – Β και γ.

2) Για το στοιχείο γ τα προσκείμενα στοιχεία είναι τα 90º – Β και β (αφού η γωνία Α δεν λαμβάνεται υπόψη) και τα αντικείμενα τα 90º – α και 90º – Γ.

1ος κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των εφαπτομένων των προσκείμενων στοιχείων του.

2ος κανόνας του Napier

Το ημίτονο οποιουδήποτε στοιχείου είναι ίσο με το γινόμενο των συνημιτόνων των αντικειμένων στοιχείων του.

Για παράδειγμα για το στοιχείο ***β:***

1ος Νόμος: $ημβ = εφγ \cdot εφ(90^o - Γ) \Leftrightarrow ημβ = εφγ \cdot σφΓ$

2ος Νόμος: $ημβ = συν(90^o - α) \cdot συν(90 \cdot B) \Leftrightarrow ημβ = ημα \cdot ημB$

Για παράδειγμα για το στοιχείο ***90º – Β:***

1ος Νόμος: $ημ(90^o - B) = εφγ \cdot εφ(90^o - α) \Leftrightarrow συνB = εφγ \cdot σφα$

2ος Νόμος: $ημ(90^o - \mathrm{B}) = συν(90^o - \mathrm{Γ}) \cdot συνβ \Leftrightarrow συνB = ημΓ \cdot συνβ$

Σχ. 8.11

8.3.2 Θεωρήματα τεταρτημορίων

Η γνώση των κανόνων Napier που μας δίνουν την δυνατότητα να παράξουμε τις 3 εξισώσεις με τα 3 άγνωστα στοιχεία του τριγώνου, δεν είναι αρκετή για να επιλύσουμε ένα ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο. Στην επίλυση ενός ορθογωνίου σφαιρικού τριγώνου, συναντάμε δυσκολίες που δεν τις έχουμε στο επίπεδο ορθογώνιο. Να επισημανθεί ότι στο σφαιρικό ορθογώνιο τρίγωνο η υποτείνουσα δεν είναι πάντα η μεγαλύτερη πλευρά, και οι γωνίες που είναι διάφορες της ορθής δεν είναι απαραιτήτως οξείες. Έτσι, αν από τους παραπάνω τύπους υπολογιστεί το ημίτονο ενός άγνωστου στοιχείου, π.χ. $ημB = 0{,}5$, υπάρχουν δύο πιθανές γωνίες από 0º έως 180º: $B = 30^o$ ή $B = 180^o - 30^o = 150^o$. Τα παρακάτω θεωρήματα μας λύνουν το πρόβλημα της επιλογής μεταξύ των δύο αυτών γωνιών.

1º Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, κάθε γωνία (εκτός της ορθής Α) και η απέναντί της πλευρά ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (δηλ. $\mathrm{B} < 90^o \Leftrightarrow β < 90^o$ και $B > 90^o \Leftrightarrow β > 90^o$).

2º Θεώρημα: Σε κάθε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, μια πλευρά που είναι απέναντι από οξεία γωνία είναι μικρότερη ή ίση της γωνίας, ενώ μια πλευρά που είναι απέναντι από αμβλεία γωνία είναι μεγαλύτερη ή ίση της γωνίας.

3ᵒ Θεώρημα: Σε ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ:

1) Αν η υποτείνουσα α έχει πέρας στο 1^{o} τεταρτημόριο (δηλ. $\alpha < 90^{o}$), τότε οι πλευρές β, γ έχουν πέρατα στο ίδιο τεταρτημόριο (και οι δύο στο 1^{o} ή και οι δύο στο 2^{o}) και αντίστροφα.

2) Αν η υποτείνουσα α έχει το πέρας στο 2^{o} τεταρτημόριο (δηλ. $90^{o} < \alpha < 180^{o}$), τότε οι πλευρές β και γ θα έχουν πέρατα σε διαφορετικά τεταρτημόρια.

8.3.3 Μεθοδολογία επίλυσης ορθογώνιου σφαιρικού τριγώνου

Βήμα 1ᵒ: Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο κυκλώνοντας τα γνωστά στοιχεία.

Βήμα 2ᵒ: Εφαρμόζουμε τους κανόνες Napier, κατά τέτοιον τρόπο, ώστε να πάρουμε 3 σχέσεις, οι οποίες να έχουν μόνο ένα άγνωστο στοιχείο. Αποφεύγουμε να χρησιμοποιήσουμε στοιχείο που υπολογίστηκε για τον υπολογισμό άλλου στοιχείου.

Βήμα 3ᵒ: Χρησιμοποιούμε τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων (όπου χρειάζεται).

Βήμα 4ᵒ: Γράφουμε τον τύπο ελέγχου: εφαρμόζουμε τον κανόνα Napier που συνδέει τα τρία άγνωστα στοιχεία.

Παράδειγμα 8.1

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{o}$, $\alpha = 75^{o}$ και $\beta = 46^{o}$.

Λύση

Σχηματίζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, που στη θέση τής υποτείνουσας και των δυο γωνιών έχει τα συμπληρωματικά τους στοιχεία (σχ. 8.12).

Εφαρμόζουμε τον κατάλληλο κανόνα Napier, έτσι ώστε η σχέση που θα προκύψει να περιλαμβάνει τα εξής 3 στοιχεία: το ζητούμενο και τα δύο αρχικά δεδομένα. Επομένως:

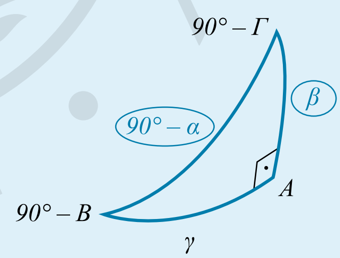
Υπολογισμός της Γ:

$$\eta\mu(90^{o} - \Gamma) = \varepsilon\varphi(90^{o} - \alpha)\cdot\varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \sigma\varphi\alpha\cdot\varepsilon\varphi\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\,\beta}{\varepsilon\varphi\,\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{\varepsilon\varphi\,46^{o}}{\varepsilon\varphi\,75^{o}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \frac{1{,}03553}{3{,}73205} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = 0{,}27747$$

Άρα $\Gamma = \sigma\upsilon\nu^{-1}\,0{,}27747 = 73{,}89074$



Σχ. 8.12

Υπολογισμός της Β:

$$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^{o} - \alpha)\cdot\sigma\upsilon\nu(90^{o} - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha\cdot\eta\mu B \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 46^{o} = \eta\mu 75^{o}\cdot\eta\mu B \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\eta\mu\,46^{o}}{\eta\mu\,75^{o}} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{0{,}71934}{0{,}96593} = 0{,}74471$$

Άρα $B = \eta\mu^{-1}\,0{,}74471 = 48{,}1342^{o}$ ή $B = 180^{o} - 48{,}1342^{o} = 131{,}8658^{o}$

Έχουμε δύο πιθανές τιμές για την γωνία Β. Σύμφωνα με το 1^{o} Θεώρημα τεταρτημορίων, επειδή $\beta = 46^{o} < 90^{o}$, θα πρέπει και $B < 90^{o}$. Άρα η τιμή $131{,}8658^{o}$ απορρίπτεται και επομένως $B = 48{,}1342^{o}$.

Υπολογισμός της γ:

$$\eta\mu(90^{o} - \alpha) = \sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^{o} = \sigma\upsilon\nu 46^{o}\cdot\sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{\sigma\upsilon\nu\,75^{o}}{\sigma\upsilon\nu\,46^{o}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\gamma = \frac{0{,}25882}{0{,}69466} = 0{,}37259$$

Άρα $\gamma = \sigma\upsilon\nu^{-1}\, 0{,}37259 = 68{,}12456^o$

Τύπος ελέγχου: $\eta\mu(90^o - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(90^o - B) \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$

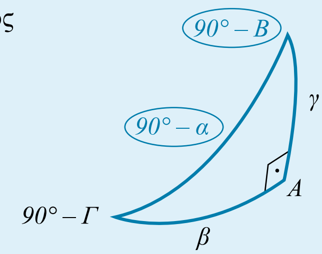
$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 73{,}89074 = \eta\mu 48{,}1342^o \cdot \sigma\upsilon\nu 68{,}12456^o \Leftrightarrow 0{,}27747 = 0{,}74471 \cdot 0{,}37259$ που ισχύει.

Παράδειγμα 8.2

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^o$, $\alpha = 62^o$ και $B = 125^o$.

Λύση

Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.13 έχουμε:



Σχ. 8.13

Υπολογισμός της γ:

$\eta\mu(90^o - B) = \varepsilon\varphi(90^o - \alpha) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \sigma\varphi\alpha \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu B = \dfrac{\varepsilon\varphi\,\gamma}{\varepsilon\varphi\,\alpha} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 125^o = \dfrac{\varepsilon\varphi\,\gamma}{\varepsilon\varphi\, 62^o} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = \sigma\upsilon\nu 125^o \cdot \varepsilon\varphi 62^o$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = (-0{,}57358) \cdot 1{,}88073 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\gamma = -1{,}07875$

$\varepsilon\varphi^{-1}\, 1{,}07875 = 47{,}16952^o$. Άρα $\gamma = 180^o - 47{,}16952^o = 132{,}83048^o$

Υπολογισμός της β:

$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^o - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^o - \mathrm{B}) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\mathrm{B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu 62^o \cdot \eta\mu 125^o \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}88294 \cdot 0{,}81915 \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}72326$

Άρα $\beta = \eta\mu^{-1}\, 0{,}72326 = 46{,}32429^o$ ή $\beta = 180^o - 46{,}32429^o = 133{,}67571^o$

Σύμφωνα με το 1^o Θεώρημα Τεταρτημοριών, επειδή $B = 125^o > 90^o$, θα πρέπει και $\beta > 90^o$. Άρα η λύση $\beta = 46{,}32429^o$ απορρίπτεται. Επομένως: $\beta = 133{,}67571^o$

Υπολογισμός της Γ:

$\eta\mu(90^o - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^o - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^o - \mathrm{B}) \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\,\Gamma} \cdot \dfrac{1}{\varepsilon\varphi\, B} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\alpha \cdot \varepsilon\varphi\, B} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = \dfrac{1}{0{,}46947 \cdot (-1{,}42815)} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\Gamma = -1{,}49148$

$\varepsilon\varphi^{-1}\, 1{,}49148 = 56{,}15914^o$. Άρα $\Gamma = 180^o - 56{,}15914 = 123{,}84086^o$

Τύπος ελέγχου: $\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^o - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \dfrac{\varepsilon\varphi\,\gamma}{\varepsilon\varphi\,\Gamma} \Leftrightarrow 0{,}72326 = \dfrac{-1{,}07875}{-1{,}49418}$ που ισχύει.

Παρατήρηση

Μικρή απόκλιση στο 5^o δεκαδικό ψηφίο δικαιολογείται λόγω των στρογγυλοποιήσεων που έχουν γίνει.

Παράδειγμα 8.3

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^o$, $\gamma = 40^o$ και $\Gamma = 75^o$.

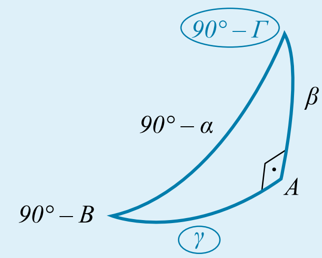
Λύση:

Με εφαρμογή των Κανόνων Napier στη διάταξη του σχήματος 8.14 έχουμε:

Υπολογισμός της β:

$\eta\mu\beta = \varepsilon\varphi(90^{o} - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \sigma\varphi\Gamma \cdot \varepsilon\varphi\gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{\varepsilon\varphi\,\gamma}{\varepsilon\varphi\,\Gamma} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \frac{0{,}8391}{3{,}73205} \Leftrightarrow \eta\mu\beta = 0{,}22484$$



Σχ. 8.14

Άρα $\beta = \eta\mu^{-1}\,0{,}22484 = 12{,}99347$ ή $\beta = 180^{o} - 13{,}003^{o} = 167{,}00653^{o}$

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι γωνία (Γ), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της B:

$\eta\mu(90^{o} - \Gamma) = \sigma\upsilon\nu(90^{o} - B) \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\Gamma = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu 75^{o} = \eta\mu B \cdot \sigma\upsilon\nu 40^{o} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{\sigma\upsilon\nu 75^{o}}{\sigma\upsilon\nu 40^{o}} \Leftrightarrow \eta\mu B = \frac{0{,}25882}{0{,}76604} = 0{,}33786$$

Άρα $B = \eta\mu^{-1}\,0{,}33786 = 19{,}74655^{o}$ ή $B = 180^{o} - 19{,}74655^{o} = 160{,}25345^{o}$

Επειδή δεν γνωρίζουμε την απέναντι πλευρά (β), δεν μπορούμε να απορρίψουμε καμία από τις τιμές με βάση τα Θεωρήματα Τεταρτημορίων.

Υπολογισμός της α:

$\eta\mu\gamma = \sigma\upsilon\nu(90^{o} - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{o} - \Gamma) \Leftrightarrow \eta\mu\gamma = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu\Gamma \Leftrightarrow$

$$\eta\mu 40^{o} = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu 75^{o} \Leftrightarrow \eta\mu\alpha = \frac{\eta\mu 40^{o}}{\eta\mu 75^{o}} = \frac{0{,}64279}{0{,}96593} = 0{,}66546$$

Άρα $\alpha = \eta\mu^{-1}\,0{,}66546 = 41{,}71763^{o}$ ή $\alpha = 180^{o} - 41{,}71763^{o} = 138{,}28237^{o}$

Για να απορρίψουμε κάποια από τις δύο τιμές σύμφωνα με το 3^{o} Θεώρημα Τεταρτημορίων, πρέπει να γνωρίζουμε αν οι πλευρές β, γ ανήκουν στο ίδιο ή σε διαφορετικά τεταρτημόρια. Επειδή για την β πλευρά έχουμε δύο πιθανές τιμές: 12,99347^{o} και 167,00653^{o}, θα χρειαστεί να διακρίνουμε τις ακόλουθες περιπτώσεις:

1^{η} περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 12{,}99347^{o}$. Τότε, από το 1^{o} Θεώρημα Τεταρτημορίων, επειδή $\beta < 90^{o}$, θα είναι και $B < 90^{o}$ και άρα $B = 19{,}74655^{o}$. Στη συνέχεια, επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν στο ίδιο τεταρτημόριο (είναι και οι δύο μικρότερες από 90^{o}), σύμφωνα με το 3^{o} Θεώρημα Τεταρτημορίων, η υποτείνουσα α θα είναι μικρότερη από 90^{o}, άρα $\alpha = 41{,}71763^{o}$.

2η περίπτωση: Έστω ότι $\beta = 167{,}00653^{o}$, τότε σύμφωνα με το 1^{o} Θεώρημα Τεταρτημορίων θα είναι $B = 160{,}25345^{o}$. Για την υποτείνουσα α, σύμφωνα με το 3^{o} Θεώρημα Τεταρτημορίων, ισχύει ότι είναι μεγαλύτερη από 90^{o} επειδή οι πλευρές β και γ ανήκουν σε διαφορετικά τεταρτημόρια ($\beta = 167{,}00653 > 90^{o}$ και $\gamma = 40^{o} < 90^{o}$). Επομένως: $\alpha = 138{,}28237^{o}$.

Έτσι έχουμε δύο διαφορετικές λύσεις:

1η λύση: $\beta = 12{,}99347^{o}$, $B = 19{,}74655^{o}$ και $\alpha = 41{,}71763^{o}$.

2η λύση: $\beta = 167{,}00653^{o}$, $B = 160{,}25345^{o}$ και $\alpha = 138{,}28237^{o}$.

Η επαλήθευση με τον τύπο ελέγχου είναι:

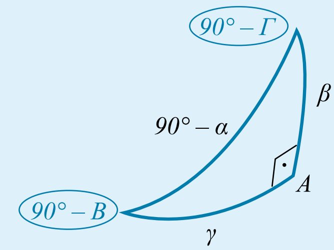
$\eta\mu\beta = \sigma\upsilon\nu(90^{o} - \alpha) \cdot \sigma\upsilon\nu(90^{o} - B) \Leftrightarrow \eta\mu\beta = \eta\mu\alpha \cdot \eta\mu B$

1η λύση: $\eta\mu 12{,}99347^{o} = \eta\mu 41{,}71763^{o} \cdot \eta\mu 19{,}74655^{o} \Leftrightarrow 0{,}22484 = 0{,}66546 \cdot 0{,}33786$, που ισχύει.

2η λύση: $\eta\mu 167{,}00653^{o} = \eta\mu 138{,}28237^{o} \cdot \eta\mu 160{,}25345^{\circ} \Leftrightarrow 0{,}22484 = 0{,}66546^{o} \cdot 0{,}33786$, που ισχύει.

Παράδειγμα 8.4

Να επιλυθεί ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{\circ}$, $B = 48^{\circ}$ και $\Gamma = 155^{\circ}$.



Σχ. 8.15

Λύση

Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχ. 8.15.

Υπολογισμός της α:

$\eta\mu(90^{\circ} - \alpha) = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \Gamma) \cdot \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \mathrm{B}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\ \Gamma} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\ B} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{\varepsilon\varphi\ 155^{\circ}} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi\ 48^{\circ}} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{1}{-046631} \cdot \frac{1}{1{,}11061} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha = -1{,}931$$

Αδύνατον, διότι για το συνημίτονο ισχύει: $-1 \leq \sigma\upsilon\nu\alpha \leq 1$.

Άρα δεν υπάρχει σφαιρικό τρίγωνο με $A = 90^{\circ}$, $B = 48^{\circ}$ και $\Gamma = 155^{\circ}$.

8.4 Επίλυση ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου

Όπως έχει ήδη αναφερθεί, ***ορθόπλευρο*** ονομάζεται το ***σφαιρικό τρίγωνο*** που μία πλευρά του έχει μέτρο 90°. Το πολικό τρίγωνο ενός ορθόπλευρου σφαιρικού τριγώνου είναι ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο, διότι οι πλευρές ενός σφαιρικού τριγώνου είναι παραπληρωματικές των αντίστοιχων γωνιών του πολικού του. Έτσι αν στο ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι $\alpha = 90^{\circ}$, στο πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$ έχουμε: $A' = 180^{\circ} - \alpha = 180^{\circ} - 90^{\circ} = 90^{\circ}$. Επομένως για να επιλύσουμε ένα ορθόπλευρο σφαιρικό τρίγωνο, αρκεί να επιλύσουμε το πολικό του, που είναι ορθογώνιο.

Παράδειγμα 8.5

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο $AB\Gamma$ αν $\alpha = 90^{\circ}$, $B = 152^{\circ}$ και $\Gamma = 50^{\circ}$.

Λύση

Θεωρούμε το πολικό τρίγωνο $A'B'\Gamma'$, για το οποίο ισχύει:

$A' = 180^{\circ} - \alpha = 90^{\circ}$, $\beta' = 180^{\circ} - B = 28^{\circ}$ και $\gamma' = 180^{\circ} - \Gamma = 130^{\circ}$

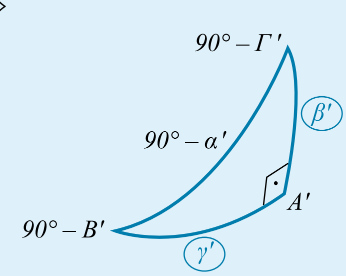
Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.16.

Υπολογισμός της α':

$\eta\mu(90^{\circ} - \alpha') = \sigma\upsilon\nu\beta' \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma' \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \sigma\upsilon\nu 28^{\circ} \cdot \sigma\upsilon\nu 130^{\circ} \Leftrightarrow$

$\sigma\upsilon\nu\alpha' = 0{,}88295 \cdot (-0{,}64279) = -0{,}56755$

$\alpha' = \sigma\upsilon\nu^{-1}(-0{,}56755) = 124{,}57956^{\circ}$



Σχ. 8.16

Υπολογισμός της B':

$\eta\mu\gamma' = \varepsilon\varphi(90^{\circ} - \mathrm{B}') \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow \eta\mu\gamma' = \sigma\varphi B' \cdot \varepsilon\varphi\beta' \Leftrightarrow$

$$\eta\mu\gamma' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\varepsilon\varphi B'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{\varepsilon\varphi\beta'}{\eta\mu\gamma'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi B' = \frac{0{,}53171}{0{,}76604} = 0{,}6941$$

Άρα $B' = \varepsilon\varphi^{-1}\ 0{,}6941 = 34{,}76451^{\circ}$

Υπολογισμός της $\varGamma'$:

$$\eta\mu\beta' = \varepsilon\varphi(90^o - \varGamma') \cdot \varepsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow \eta\mu\beta' = \sigma\varphi\varGamma' \cdot \varepsilon\varphi\gamma' \Leftrightarrow$$

$$\eta\mu\beta' = \frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\varepsilon\varphi\varGamma'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varGamma' = \frac{\varepsilon\varphi\gamma'}{\eta\mu\beta'} \Leftrightarrow \varepsilon\varphi\varGamma' = \frac{\varepsilon\varphi\ 130^o}{\eta\mu 28^o} = \frac{-1{,}19175}{0{,}46947} = -2{,}5385$$

$\varepsilon\varphi^{-1}\, 2{,}5385 = 68{,}49886^o$. Άρα $\varGamma' = 180^o - 68{,}49886^o = 111{,}50114^o$

Τύπος ελέγχου:

$$\eta\mu(90^o - \alpha') = \varepsilon\varphi(90^o - \varGamma') \cdot \varepsilon\varphi(90^o - B') \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha' = \frac{1}{\varepsilon\varphi\varGamma'} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi B'} \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu 124{,}57956^o = \frac{1}{\varepsilon\varphi 111{,}50114^o} \cdot \frac{1}{\varepsilon\varphi 34{,}76451^o} \Leftrightarrow$$

$$-0{,}56755 = \frac{1}{-2{,}5385} \cdot \frac{1}{0{,}6947} \Leftrightarrow -0{,}56755 = \frac{1}{-1{,}76197} \text{ που ισχύει.}$$

Επομένως τα άγνωστα στοιχεία του τριγώνου $AB\varGamma$ είναι:

$A = 180^o - \alpha' = 180^o - 124{,}57956^o = 55{,}42044^o$

$\beta = 180^o - B' = 180^o - 34{,}76451^o = 145{,}23549^o$

$\gamma = 180^o - \varGamma' = 180^o - 111{,}50114^o = 68{,}49886^o$

8.5 Επίλυση τυχαίου σφαιρικού τριγώνου

Η επίλυση σφαιρικού τριγώνου αφορά στην εύρεση τριών άγνωστων στοιχείων του τριγώνου, αν είναι γνωστά τα υπόλοιπα τρία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε τις θεμελιώδεις σχέσεις που αναφέρθηκαν στην παράγραφο 8.2.3. Υπάρχουν έξι διαφορετικές περιπτώσεις ανάλογα με το ποια είναι τα τρία γνωστά στοιχεία. Εκτός από τον τρόπο επίλυσης που θα δούμε σε κάθε περίπτωση, υπάρχουν και άλλοι τρόποι. ΄Ενας από τους τρόπους αυτούς είναι η ***μέθοδος των ορθογωνίων τριγώνων***. Κατά τη μέθοδο αυτή, από μια κορυφή του τριγώνου φέρουμε μέγιστο κύκλο κάθετο προς την απέναντι πλευρά, οπότε το αρχικό τρίγωνο διαιρείται σε δύο ορθογώνια, καθένα από τα οποία επιλύεται με την μεθοδολογία που αναπτύξαμε.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε έναν τρόπο επίλυσης για κάθε περίπτωση, χρησιμοποιώντας τους τύπους της παραγράφου 8.2.3.

1η περίπτωση: Αν δίνονται ***δύο πλευρές*** και η ***περιεχόμενη γωνία***, π.χ.: ***β, γ, Α.***

Αυτή η περίπτωση έχει τις περισσότερες εφαρμογές στη Ναυτιλία. Για την επίλυση χρησιμοποιούμε:

1) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε την πλευρά α και μετά
2) Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές ώστε να βρούμε τις γωνίες B, $\varGamma$.

Παράδειγμα 8.6

Να επιλυθεί σφαιρικό τρίγωνο ΑΒΓ, αν $A = 50^o$, $\beta = 65^o$ και $\gamma = 72^o$.

Λύση

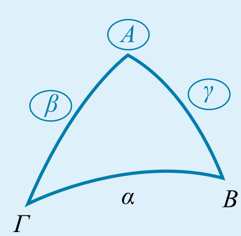
Υπολογισμός της α στο σφαιρικό τρίγωνο του σχήματος 8.17:
Από Νόμο Συνημιτόνων για πλευρές έχουμε:

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu\beta \cdot \sigma\upsilon\nu\gamma + \eta\mu\beta \cdot \eta\mu\gamma \cdot \sigma\upsilon\nu A \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = \sigma\upsilon\nu 65^o \cdot \sigma\upsilon\nu 72^o + \eta\mu 65^o \cdot \eta\mu 72^o \cdot \sigma\upsilon\nu 50^o \Leftrightarrow$$

$$\sigma\upsilon\nu\alpha = 0{,}42262 \cdot 0{,}30902 + 0{,}90631 \cdot 0{,}95106 \cdot 0{,}64279 = 0{,}68465$$

Άρα $\alpha = \sigma\upsilon\nu^{-1}\, 0{,}685 = 46{,}764^o$



Σχ. 8.17